

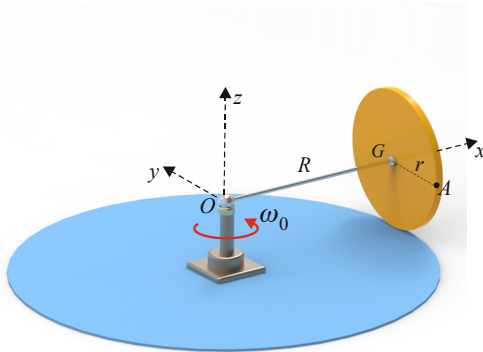
Tentamen i SG1113 Mekanik, fortsättningskurskurs

Obs! Inga hjälpmedel förutom skrivdon: papper, penna, linjaler, passare. Varje uppgift ger högst 6 poäng.

Problem (TEN B)

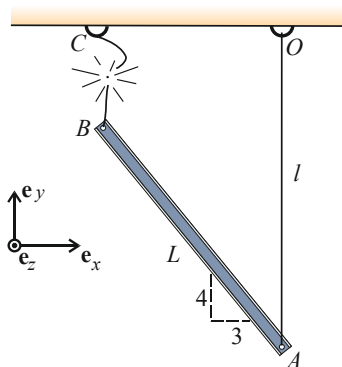
Lycka till!

1)



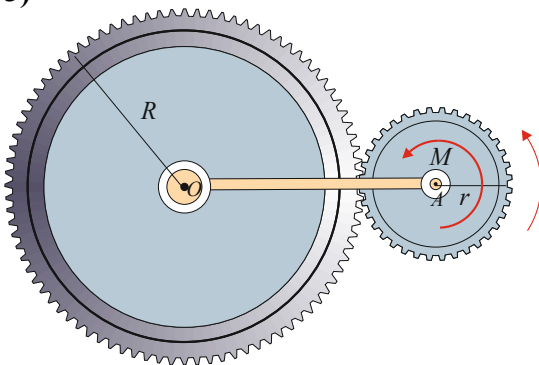
Betrakta en homogen cirkelskiva med radien r som rullar utan glidning på ett horisontellt underlag. Skivan är fäst i en lätt horisontell axel OG med längden R som roterar med en konstant vinkelhastighet ω_0 kring den vertikala fixa stängen, enligt figuren. Betrakta vidare punkten A längst ut på skivan i det ögonblick då radien GA är horisontell och bestäm dess hastighet $\mathbf{v}_A$ samt cirkelskivans vinkelacceleration $\boldsymbol{\alpha}$. Använd det halvbundna koordinatsystemet $Oxyz$ på figuren med x – axeln längs OG och z – axeln vertikal.

2)



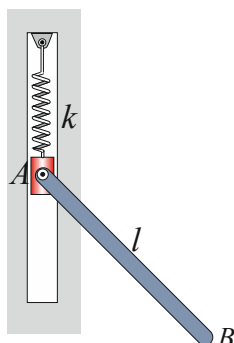
Betrakta en tung metallbalk med massan m och längden L som är upphängd med två vajrar av olika längd så att balkens lutning bestäms av katetförhållandet givet i figuren. Den långa vajerns längd är l . Den kortare vajern brister på grund av materialfel. I detta ögonblick bestäm spännkraften S i den kvarvarande vajern.

3)



Betrakta två kugghjul i vertikalplanet. Det stora hjulet med radien R är fixt och det lilla hjulet med massan m och radien r är förenat med det stora med hjälp av en lätt länk OA mellan hjulens centra. Det lilla kugghjulet är från början i vila med länken OA i ett horisontellt läge då man sätter på en elektrisk motor i A som alstrar ett konstant kraftparsmoment M som gör att lilla kugghjulet börjar rulla på ytan av det stora hjulet tills radien OA blir vertikal med A rakt ovan O . Bestäm det lilla hjulets vinkelhastighet ω i detta ögonblick.

4)



En kolv A med massan m kan röra sig friktionsfritt längs ett vertikalt spår. Kolven är fäst i en lätt fjäder med fjäderkonstanten k . En homogen stång AB , också den med massan m , samt längden l är fäst genom en glatt led i kolven så att den kan svänga fritt kring en horisontell axel genom A . Ställ upp systemets rörelseekvationer, linearisera dem för små svängningar kring jämviktsläget samt bestäm vinkel-frekvenserna för dessa.

Teori (TEN A)

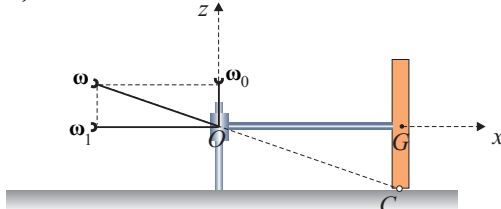
- 5) a. Betrakta två koordinatsystem ett fixt S och ett rörligt S' och härled med alla nödvändiga motiveringar sambandet mellan en partikels ortsvektorer, hastigheter och accelerationer relativt det fixa och det rörliga systemet. Alla delhastigheter och delaccelerationer måste anges. Sambandet mellan en vektors absoluta och relativa tidsderivata behöver inte härledas. (2p)
- b. Definiera vad som menas med momentancentrum C och visa (med alla nödvändiga motiveringar) att det alltid existerar vid en stel kropps plana rörelse med $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$. (2p)
- c. Betrakta tre koordinatsystem S_0, S_1 och S_2 , inför nödvändiga vinkelhastigheter och definiera nödvändiga vinkelaccelerationer. Utgå från additionsformeln för vinkelhastigheter och härled additionsformeln för vinkelaccelerationerna: $\boldsymbol{\alpha}_{2,0} = \boldsymbol{\alpha}_{2,1} + \boldsymbol{\alpha}_{1,0} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \boldsymbol{\omega}_{2,1}$. (2p)
- 6) a. Betrakta ett partikelsystem, definiera vad som menas med ett masscentrumsystem och härled med alla nödvändiga motiveringar uttrycket för kinetiska energins två delar. (2p)
- b. Betrakta ett partikelsystem, definiera ett masscentrumsystem och rörelsemängdsmomenten $\mathbf{H}_G$ och $\mathbf{H}'_G$ samt visa med alla nödvändiga motiveringar att $\mathbf{H}_G = \mathbf{H}'_G$. (2p)
- c. Visa att de inre krafternas arbete i ett stelt partikelsystem är noll. (2p)
- 7) a. Härled med alla nödvändiga motiveringar parallellförflyttningssatsen för tröghetsprodukten I_{xy} . (2p)
- b. Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt och härled uttrycket för kroppens rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_O$ på matrisform. (2p)
- c. Härled (med alla nödvändiga motiveringar) Eulers dynamiska ekvationer. (2p)
- 8) a. Definiera vad som menas med variationen $\delta q(t)$ av en generaliserad koordinat $q(t)$. (2p)
- b. Rita en figur i konfigurationsrummet och formulera Hamiltons variationsprincip. (2p)
- c. Härled med alla nödvändiga motiveringar Lagranges ekvationer från Hamiltons variationsprincip. (2p)



God Jul!

Lösningar

1)



1) Bestäm hjulets vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = -\omega_1 \mathbf{e}_x + \omega_0 \mathbf{e}_z$

Vi har: $\mathbf{v}_C = 0$, $\mathbf{v}_G = R\omega_0 \mathbf{e}_y$ (1). Sambansformeln för hastigheten ger

$$\mathbf{v}_G = \underbrace{\mathbf{v}_C}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CG} = (-\omega_1 \mathbf{e}_x + \omega_0 \mathbf{e}_z) \times r \mathbf{e}_z = r\omega_1 \mathbf{e}_y \quad (2)$$

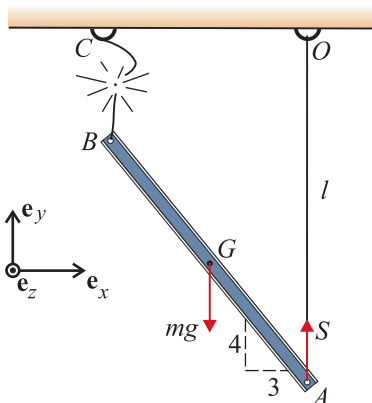
(1) och (2) ger $\mathbf{e}_y$: $r\omega_1 = R\omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{R}{r}\omega_0$ och $\boldsymbol{\omega} = -\frac{R}{r}\omega_0 \mathbf{e}_x + \omega_0 \mathbf{e}_z$

2) Bestäm $\mathbf{v}_A = \underbrace{\mathbf{v}_C}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CA} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -R/r & 0 & 1 \\ 0 & -r & r \end{bmatrix} \omega_0 = \underline{\underline{(r, R, R) \omega_0}}$

3) Bestäm skivans vinkelacceleration

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{R}{r}\omega_0 \dot{\mathbf{e}}_x = -\frac{R}{r}\omega_0 \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_x = -\frac{R}{r}\omega_0 \omega_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = -\frac{R}{r}\omega_0^2 \mathbf{e}_y$$

2)



1) Formulera kraft- och momentekvationerna för balken

$$\mathbf{e}_x: m a_{Gx} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{e}_y: m a_{Gy} = S - mg \quad (2)$$

$$\curvearrowright G: \frac{1}{12} m l^2 \alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{3}{5} S L \Rightarrow S = \frac{5}{18} m L \alpha_2 \quad (3)$$

2) Kinematiken ger

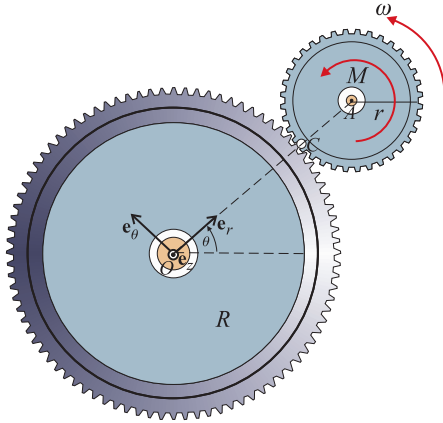
$$\mathbf{a}_A = \underbrace{\mathbf{a}_O}_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{OA} - \underbrace{\omega_1^2}_{0} \mathbf{r}_{OA} = \alpha_1 \mathbf{e}_z \times (-l \mathbf{e}_y) = l \alpha_1 \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \alpha_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{AG} - \underbrace{\omega_2^2}_{\approx 0} \mathbf{r}_{AG} = l \alpha_1 \mathbf{e}_x + \alpha_2 \mathbf{e}_z \times \frac{L}{2} \left(-\frac{3}{5} \mathbf{e}_x + \frac{4}{5} \mathbf{e}_y \right) = \left(l \alpha_1 - \frac{2}{5} L \alpha_2 \right) \mathbf{e}_x - \frac{3}{10} L \alpha_2 \mathbf{e}_y \quad (4)$$

3) Insättning av (4) i (2)-(3) ger

$$\left(\frac{5}{18} + \frac{3}{10} \right) m L \alpha_2 = mg \Rightarrow \alpha_2 = \frac{45}{26} \frac{g}{L} \Rightarrow S = \frac{5}{18} \frac{45}{26} mg = \underline{\underline{\frac{25}{52} mg}}$$

3)



1) Använd LKE

$$U_{0-1} = T_1 - T_0, \quad (1)$$

2) Kinematiken

$$\mathbf{v}_A = (R+r)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = r\omega\mathbf{e}_\theta \Rightarrow \omega = \frac{R+r}{r}\dot{\theta}$$

detta ger sambandet mellan rotationsvinklarna för lilla hjulen och radien OA enligt

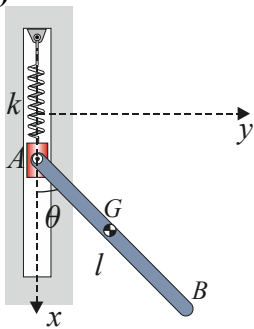
$$d\varphi = \frac{R+r}{r}d\theta \Rightarrow \varphi = \frac{R+r}{r}\theta$$

3) Arbetet: $U_{0-1} = U_{0-1}^{mg} + U_{0-1}^M = -mg(R+r) + M\varphi_1$ där $\varphi_1 = \frac{R+r}{r}\frac{\pi}{2}$

4) Kinetiska energin: $T_1 = \frac{1}{2}I_C\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mr^2\omega_1^2$

5) Insättning i (1) ger $\frac{3}{4}mr^2\omega_1^2 = \frac{\pi}{2}\frac{R+r}{r}M - mg(R+r) \Rightarrow \omega_1 = 2\sqrt{\frac{R+r}{3r}\left(\frac{\pi M}{2mr^2} - \frac{g}{r}\right)}$

4)



1) Inför generaliserade koordinater x och θ samt bestäm v_B .

$$\begin{cases} x_A = x \\ y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = x + l/2 \cos \theta \\ y_G = l/2 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} - l/2 \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_G = l/2 \dot{\theta} \cos \theta \end{cases},$$

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 / 4 - l\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta$$

2) Bestäm $L = T - V$

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(2\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 / 4 - l\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2,$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mg(2x + l/2 \cos \theta),$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(2\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 / 3 - l\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta) - \frac{1}{2}kx^2 + mg(2x + l/2 \cos \theta)$$

3) Lagranges ekvationer

$$x: 2m\ddot{x} - \frac{1}{2}ml\ddot{\theta} \sin \theta - \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 \cos \theta + kx - 2mg = 0$$

$$\theta: \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}ml\ddot{x} \sin \theta + \frac{1}{2}mgl \sin \theta = 0$$

4) Lineariserade ekvationer:

$$\begin{matrix} x: & \ddot{x} + \frac{k}{2m}x = g \\ \theta: & \ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{k}{2m} & 0 \\ 0 & -\omega^2 + \frac{3g}{2l} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$