

Tentamen i Modern Fysik (SH1014)

09.00-14.00, 2020-01-11, KTH, Stockholm

Examinator/lärare: Torbjörn Bäck (073-7650590), Pär Olsson (073-7650538)

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare + (*Matematics Handbook Beta*)

Formelblad delas ut vid tentamen

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng. Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

Motivera dina svar tydligt med uträkningar och text (och bilder när det är lämpligt). Skriv tydligt.

Gör dina egna, rimliga, uppskattningar när det behövs. Det ska framgå tydligt från din text vilka antaganden och uppskattningar du gjort.

Lycka Till!

1. En partikel med massan $m = 1$ u befinner sig i en harmonisk oscillatorpotential med fjäderkonstanten κ . Man observerar att partikeln från sitt grundtillstånd bland annat kan absorbera ljus med våglängderna 503 nm och 754 nm och har kunnat sluta sig till att dessa övergångar måste vara bland de fyra första exciterade tillstånden.
 - a) Bestäm fjäderkonstanten κ . [2 p]
 - b) Härled för den tidsberoende Schrödingerekvationen vad grundtillståndets energiegenvärde blir i termer av m och ω_0 , givet att den enklaste vågfunktion som uppfyller Schrödingerekvationen är en Gaussian på formen $\Psi(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}$. [3 p]
2. En stav färdas i mycket hög fart, v , längs x-axeln i positiv riktning, relativt en stillastående observatör. Staven har vinkeln θ_0 gentemot x' -axeln, och längden L_0 , i sitt eget referenssystem (x', y') . Vi begränsar θ_0 till intervallet $0^\circ - 90^\circ$.
 - a) Vad blir dess längd L i det stillastående referenssystemet? Förenkla så långt det går. [3 p]
 - b) Vad blir dess vinkel θ i det stillastående referenssystemet? Förenkla så långt det går. [2 p]
3. I Bohrmodellen antar man att elektronen rör sig i Coulombpotentialen för en punktförmig laddning och att rörelsemängdsmomentet för de stabila elektronbanorna är kvantiserat med $L = n\hbar$.
 - a) Härled, med klassisk fysik, ekvationen som ger radien för elektronbanorna som funktion av kvanttalet n , dvs: $r_n = n^2 a_0$. [2 p]
 - b) Använd nu den kvantmekaniska lösningsmodellen för att visa att Bohrmodellens radie, som funktion av n överensstämmer med den mest sannolika radien för just de tillstånd som har kvanttal: $l = n - 1$. Visa detta för fallen då $n = 1, 2, 3$ samt att det inte stämmer för valfritt fall då $l \neq n - 1$. [3 p]

Utöver de vågfunktioner som finns i formelsamlingen anger vi här även den radiella delen för $3d$ -tillstånden:

$$R_{3,2} = \frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$$

4. Man dopar ofta halvledare för att få tillgång till fria laddningsbärare. Ett sätt att dopa kisel är att använda fosfor. En fosforatom, med fem valenselektroner, omgiven av kiselgittret, kan då modelleras som en väteknande atom för vilken den "överblivna", så kallade donatorelektronen, ser en effektiv laddning $+e$ då resten av kärnladdningen avskärmas. Eftersom denna atom inte befinner sig i vakuum så måste man i sin formalism ersätta dielektricitetskonstanten ϵ_0 med $\epsilon = \Omega\epsilon_0$, där konstanten Ω beror av det omgivande materialet. Elektronen är inte heller fri att röra sig i vanliga orbitaler utan följer en dispersionsrelation som vi sätter till $\mathcal{E} = Ak^2$, vilket ger den en *effektiv massa*, m_{eff} , istället för den fria elektronmassan. Givet att $\Omega = 12$ för kisel, och $A = 1.2 \cdot 10^{-38} \text{ J}^2\text{s}^2/\text{kg}$, hur mycket energi kostar det att frigöra donatorelektronen från sitt grundtillstånd? [5 p]

Vänd blad!

5. Kapten James T. Kirk har fått en ny gammapistol i julklapp av Mr. Spock och han är nu sugen på att testa den på sin skjutbana ombord på rymdskeppet Enterprise. Han ställer sig ca 10 meter från måltavlan och siktar. Men plötsligt så blir han lite orolig för att gammastrålningen kan spridas tillbaka mot honom medelst Comptonspridning när han skjuter gammafotoner mot måltavlan. Måltavlan består av metall.

a) Antag först att Comptonspridningen sker i endast en punkt, och att Kirk har ställt in gammaenergin på sin pistol till 511 keV. Med vilken gammaenergi kommer gammafotonerna (som sprids från måltavlan) rakt tillbaka mot Kirk? [1 p]

b) Uppmuntrad efter att ha löst problemet i a) så börjar Kirk vrida upp energin på sin gammapistol. Men han har glömt en sak: gammastrålningen kan ju spridas två gånger (med vinkeln θ_1 respektive $\theta_2 = 180^\circ - \theta_1$) och sedan träffa honom ändå.

- Ta fram uttrycket (förkortat så mycket som möjligt) för energin på fotonerna som träffar Kirk efter två spridningar i måltavlan. [3 p]
- Om Kirk vrider upp gammafotonenergin till mycket höga värden, finns det en gräns för hur hög fotonenergin som sprids tillbaka (efter två spridningspunkter) kan bli? I så fall, vad är gränsfotonenergin? [1 p]

6. Under tiden som Kirk leker med sin gammapistol så arbetar Mr Spock med viktigare saker. Han har byggt en elektrontarget (med praktiskt taget stillastående elektroner) och nu arbetar han med en elektronaccelerator för att studera e-e-kollisioner.

Vid en e-e-kollision betraktat från masscentrumsystemet, så kommer de två elektronerna från varsitt håll med lika stor kinetisk energi, $E_{\text{kin}}^{\text{cm}}$. Spock har för sitt första testexperiment valt denna kinetiska elektronenergi till $E_{\text{kin}}^{\text{cm}} = 10$ [MeV].

Vilken kinetisk elektronenergi, $E_{\text{kin}}^{\text{lab}}$ måste Spock ställa in på sin elektronaccelerator (i labsystemet) för att uppfylla kravet ovan? Ange svaret i enheten MeV. [5 p]

7. Dr. Leonard McCoy, *Chief Medical Officer* ombord på Enterprise, är intresserad av att mäta blodvolymen hos en av sina patienter. Han använder radioaktivitet för att bestämma volymen på följande sätt:

Dr. McCoy preparerar först en lösning som innehåller ^{24}Na , en radioaktiv natriumisotop med halveringstiden 15.0 h. Patienten injiceras med 0.5 cm^3 av lösningen som vid den tidpunkten har aktiviteten $108 \mu\text{Ci}$ per liter. Lösningen blandar sig med blodet. Fem timmar efter injektionen (då vi med god marginal kan anta att lösningen är helt utblandad med allt blod) tas ett blodprov på 2.0 cm^3 , och aktiviteten på detta prov mäts upp till 32 sönderfall per minut. Bestäm patientens blodvolym (i liter). [5 p].

8. Det är ofta svårt att direkt mäta massan för atomer/atomkärnor som har kort halveringstid. I vissa fall kan dock massan beräknas med stor noggrannhet utifrån experimentella data för atomkärnans sönderfall.

Den radioaktiva nukliden ^{212}Po ($t_{1/2} = 0.3 \mu\text{s}$) sönderfaller till den stabila nukliden ^{208}Pb (atommassa: 207.976652 [u]) med alfasönderfall. Experimentellt så observeras en kinetisk energi för alfapartikeln på 8785 keV.

a) Beräkna alfasönderfalllets Q -värde. [2 p].

b) Beräkna atommassan (i atomära massenheter [u]) för ^{212}Po . [3 p].