

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155/SI1151

Måndag 2021-08-19 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	BETA, miniräknare, formelblad på skrivningens sida 3-5
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En elektron i en väteatom har vågfunktionen

$$\Psi = N(\psi_{100} + 3i\psi_{211} - \psi_{310} + 2\psi_{31-1})$$

där N är en konstant och ψ_{nlm} är egentillstånd. Tre mätningar utförs i följd direkt efter varandra: (1) Först mäts energins värde och svaret antas bli $E = -1.51$ eV, (2) sedan mäts L_z , (3) och slutligen mäts L^2 .

- (a) Vad är väntevärdet hos E före den första mätningen?
- (b) Vad är de möjliga resultaten vid den andra mätningen och med vilka sannolikheter fås dessa värden?
- (c) Vad är de möjliga resultaten vid den tredje mätningen och med vilka sannolikheter fås dessa värden?

2. En partikel med massa m är i en asymmetrisk tvådimensionell harmonisk oscillator-potential

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + 4y^2)$$

Lösningen till en endimensionell harmonisk oscillator får användas utan härledning.

- (a) Bestäm samtliga energinivåer. Finns någon degenerering? Ange i så fall de degenererade tillstånd som har lägst energi.
- (b) Beräkna osäkerheten

$$\sqrt{\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle \cdot \langle \mathbf{r} \rangle}$$

i grundtillståndet där $\mathbf{r} = (x, y)$.

3. Ett elektronspinn är i grundtillståndet i ett likformigt magnetfält $B_0 \mathbf{e}_z$. En störning i form av ett likformigt magnetfält $B_1(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ läggs på. Antag att $B_1 \ll B_0$ och räkna ut första och andra ordningens korrekationer till grundtillståndsenergin.

VÄND!

4. En partikel med massa m är i en endimensionell harmonisk oscillatorpotential. Beräkna väntevärdet av energin:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}$$

där $\beta = 1/kT$, k är Boltzmanns konstant och T är temperaturen. Beräkna även värmekapaciteten $C = d\langle E \rangle/dT$ och visa att C går mot ett klassiskt uttryck vid höga temperaturer.

5. Alice och Bob experimenterar med två elektronspinn. Alice utför mätningar av z-komponenten hos det ena spinnet som betecknas S_z^A , och Bob mäter S_z^B hos det andra spinnet. Vid tiden $t = 0$ är båda spinnen i samma tillstånd

$$|\chi_A(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_A, \quad |\chi_B(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_B$$

Spinnen antas växelverka med Hamiltonoperatorn

$$H = g S_z^A S_z^B$$

där g är en konstant. Vid tiden $t > 0$ mäter Alice S_z^A . Bestäm de olika möjliga tillstånden hos Bobs spinn direkt efter Alices mätning samt sannolikheten att få dessa tillstånd.

LYCKA TILL!

Lösning

1. En elektron i en väteatom har vågfunktionen

$$\Psi = N(\psi_{100} + 3i\psi_{211} - \psi_{310} + 2\psi_{31-1})$$

där N är en konstant och ψ_{nlm} är egentillstånd. Tre mätningar utförs i följd direkt efter varandra: (1) Först mäts energins värde och svaret antas bli $E = -1.51$ eV, (2) sedan mäts L_z , (3) och slutligen mäts L^2 .

(a) Vad är väntevärdet hos E före den första mätningen?

(b) Vad är de möjliga resultaten vid den andra mätningen och med vilka sannolikheter fås dessa värden?

(c) Vad är de möjliga resultaten vid den tredje mätningen och med vilka sannolikheter fås dessa värden?

(a) Normera tillståndet:

$$1 = \langle \Psi | \Psi \rangle = |N|^2(1^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2) = 15|N|^2$$

Sätt $N = 1/\sqrt{15}$.

Med $E_n = -13.6/n^2$ eV fås

$$\langle E \rangle = \sum E_n |c_{nlm}|^2 = \frac{1}{15}(E_1 + 9E_2 + E_3 + 4E_3) = \frac{-13.6}{15}(1 + 9/2^2 + 5/3^2) = -3.45 \text{ eV}$$

(b) Den första mätningen ger resultatet $E_3 = 1.51$ eV. Vid den första mätningen ändras tillståndet därför till

$$\Psi = N(-\psi_{310} + 2\psi_{31-1})$$

Normera:

$$1 = \langle \Psi | \Psi \rangle = |N|^2(1^2 + 2^2) = 5|N|^2 \Rightarrow N = 1/\sqrt{5}$$

Mha $L_z \psi_{nlm} = m\hbar \psi_{nlm}$ fås möjliga resultat av den andra mätningen och motsvarande sannolikheter:

$$m = 0 : L_z = 0, P(0) = |c_{310}|^2 = 1/5$$

$$m = -1 : L_z = -\hbar, P(-1) = |c_{31-1}|^2 = 4/5$$

(c) Efter den andra mätningen är tillståndet antingen ψ_{310} eller ψ_{31-1} beroende på svaret vid mätning 2. I båda fallen blir svaret i den tredje tredje mätningen $l = 1$ med sannolikhet 1. Mha $L^2 \psi_{nlm} = l(l+1)\hbar^2 \psi_{nlm}$ fås

$$L^2 = 2\hbar^2$$

2. En partikel med massa m är i en asymmetrisk tvådimensionell harmonisk oscillator-potential

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + 4y^2)$$

Lösningen till en endimensionell harmonisk oscillator får användas utan härledning.

(a) Bestäm samtliga energinivåer. Finns någon degenerering? Ange i så fall de degenererade tillstånd som har lägst energi.

(b) Beräkna osäkerheten

$$\sqrt{\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle \cdot \langle \mathbf{r} \rangle}$$

i grundtillståndet där $\mathbf{r} = (x, y)$.

(a)

$$H = H_x + H_y$$

$$H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (2y)^2 = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m(2\omega)^2 y^2$$

Energinivåer:

$$E_{n_x, n_y} = E_{n_x} + E_{n_y} = (n_x + 1/2)\hbar\omega + (n_y + 1/2)\hbar(2\omega) = (n_x + 2n_y + 3/2)\hbar\omega, n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$$

Grundtillståndet har $(n_x, n_y) = (0, 0)$ och är ickedegenererat. Första exciterade tillståndet har $(n_x, n_y) = (1, 0)$ och är ickedegenererat. Den lägsta degenererade energinivån är den andra exciterade nivån som har $(n_x, n_y) = (2, 0)$ eller $(0, 1)$ och är tvåfalt degenererad.

(b)

$$\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle \cdot \langle \mathbf{r} \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle - (\langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2)$$

I grundtillståndet är $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$. Beräkna övriga termer:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | (a^\dagger + a)^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | (a^\dagger)^2 + a^2 + a^\dagger a + a a^\dagger | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | (a^\dagger)^2 | 0 \rangle = \langle 0 | a^2 | 0 \rangle = 0, a a^\dagger - a^\dagger a = 1 \Rightarrow$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | 2a^\dagger a + 1 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle y^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m(2\omega)} = \frac{\hbar}{4m\omega}$$

Detta ger

$$\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle \cdot \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} + \frac{\hbar}{4m\omega} = \frac{3\hbar}{4m\omega}$$

Den sökta osäkerheten är

$$\sqrt{\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle \cdot \langle \mathbf{r} \rangle} = \sqrt{\frac{3\hbar}{4m\omega}}$$

3. Ett elektronspinn är i grundtillståndet i ett likformigt magnetfält $B_0 \mathbf{e}_z$. En störning i form av ett likformigt magnetfält $B_1(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ läggs på. Antag att $B_1 \ll B_0$ och räkna ut första och andra ordningens korrekationer till grundtillståndsenergin.

Ostörd Hamiltonoperator

$$H = \frac{e}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{e}{m} B_0 S_z$$

Egentillstånd och energieigenvärden:

grundtillstånd: $|-z\rangle = \downarrow, E_-^0 = -\frac{e\hbar}{2m} B_0$

exciterat tillstånd: $|+z\rangle = \uparrow, E_+^0 = +\frac{e\hbar}{2m} B_0$

Störningen är

$$V = \frac{e}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{eB_1}{m} \frac{S_x + S_y}{\sqrt{2}} = \frac{e\hbar}{2m} B_1 \begin{pmatrix} 0 & (1-i)/\sqrt{2} \\ (1+i)/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin:

$$E_-^1 = \langle -z|V|-z\rangle = \frac{e\hbar}{2m} B_1 (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & (1-i)/\sqrt{2} \\ (1+i)/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Andra ordningens korrektion till grundtillståndsenergin:

$$E_-^2 = \frac{|\langle +z|V|-z\rangle|^2}{E_-^0 - E_+^0}$$

Beräkna störningsmatriselementet:

$$\langle +z|V|-z\rangle = \frac{e\hbar}{2m} B_1 (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & (1-i)/\sqrt{2} \\ (1+i)/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{e\hbar}{2m} B_1 \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Korrektionen blir

$$E_-^2 = \left(\frac{e\hbar}{2m} \right)^2 B_1^2 \frac{|(1-i)/\sqrt{2}|^2}{-2e\hbar B_0/(2m)} = -\frac{e\hbar}{4m} \frac{B_1^2}{B_0}$$

Koll: Det exakta grundtillståndet är spinn ner i riktningen $\mathbf{n}$ längs det totala magnetfältet $\mathbf{B} = (B_1/\sqrt{2}, B_1/\sqrt{2}, B_0)$:

$$\begin{aligned} E_{-n} &= -\frac{e\hbar}{2m} B = -\frac{e\hbar}{2m} \sqrt{B_0^2 + B_1^2} = -\frac{e\hbar}{2m} B_0 \sqrt{1 + (B_1/B_0)^2} = -\frac{e\hbar}{2m} B_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{e\hbar}{2m} B_0 - \frac{e\hbar}{4m} \frac{B_1^2}{B_0} + \dots \end{aligned}$$

vilket stämmer med resultaten från störningsräkning.

4. En partikel med massa m är i en endimensionell harmonisk oscillatorpotential. Beräkna väntevärdet av energin:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}$$

där $\beta = 1/kT$, k är Boltzmanns konstant och T är temperaturen. Beräkna även värmekapaciteten $C = d\langle E \rangle/dT$ och visa att C går mot ett klassiskt uttryck vid höga temperaturer.

Energins väntevärde är

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \frac{\sum_n (n+1/2)\hbar\omega e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega}}{\sum_n e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega}} \\ &= \frac{\sum_n n\hbar\omega e^{-n\beta\hbar\omega}}{\sum_n e^{-n\beta\hbar\omega}} + \frac{\hbar\omega}{2} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_n e^{-n\beta\hbar\omega} + \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned}$$

Beräkna summan:

$$\sum_n (e^{-\beta\hbar\omega})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} + \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{d}{d\beta} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) + \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} + \frac{\hbar\omega}{2} \\ &= \left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \end{aligned}$$

där $\langle n \rangle = 1/(e^{\beta\hbar\omega} - 1)$ är Bose-Einsteinfördelningen.

Värmekapaciteten:

$$\begin{aligned} C &= \frac{dE}{dT} = \frac{dE}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} = \frac{dE}{d\beta} \frac{d}{dT} \frac{1}{kT} = -\frac{1}{kT^2} \frac{dE}{d\beta} = -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{(\hbar\omega)^2}{kT^2} \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \end{aligned}$$

Höga temperaturer: $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow e^{\beta\hbar\omega} \rightarrow 1, e^{\beta\hbar\omega} - 1 \rightarrow \beta\hbar\omega \Rightarrow$

$$C \rightarrow \frac{(\hbar\omega)^2}{kT^2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} = k$$

Här har $\hbar$ kancerat vilket betyder att uttrycket är klassiskt. Det motsvarar klassisk ekvipartition:

$$E = (\text{antal gaussfördelade frihetsgrader}=2) \times kT/2 = kT \Rightarrow C = k$$

Antalet frihetsgrader blir två eftersom p och x ingår kvadratisk i H .

5. Alice och Bob experimenterar med två elektronspinn. Alice utför mätningar av z-komponenten hos det ena spinnet som betecknas S_z^A , och Bob mäter S_z^B hos det andra spinnet. Vid tiden $t = 0$ är båda spinnen i samma tillstånd

$$|\chi_A(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_A, \quad |\chi_B(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_B$$

Spinnen antas växelverka med Hamiltonoperatören

$$H = gS_z^A S_z^B$$

där g är en konstant. Vid tiden $t > 0$ mäter Alice S_z^A . Bestäm de olika möjliga tillstånden hos Bobs spinn direkt efter Alices mätning samt sannolikheten att få dessa tillstånd.

Skriv om i produktbasen $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$. Tillståndet vid $t = 0$ är produkten av A:s och B:s tillstånd:

$$|\chi(0)\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hamiltonoperatören representeras av matrisen

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där $\omega = g\hbar/4$. Tillståndet vid tiden t blir

$$|\chi(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_{++} \\ c_{+-} \\ c_{-+} \\ c_{--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ e^{+i\omega t} \\ e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

Alice mäter spinn upp med sannolikhet

$$P_+^A = |c_{++}|^2 + |c_{+-}|^2 = 1/2^2 + 1/2^2 = 1/2$$

och Bobs spinn är då i tillståndet

$$|\chi_B(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega t}|\uparrow\rangle + e^{+i\omega t}|\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ e^{+i\omega t} \end{pmatrix}$$

Alice mäter spinn ner med sannolikhet

$$P_-^A = |c_{-+}|^2 + |c_{--}|^2 = 1/2^2 + 1/2^2 = 1/2$$

och Bobs spinn är då i tillståndet

$$|\chi_B(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+i\omega t}|\uparrow\rangle + e^{-i\omega t}|\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$