

OMTENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 och SI1140 Del 1, VT17

Onsdagen 16 augusti 8:00-13:00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut. Räknedosa ej tillåten!

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från kursomgången VT17 adderas till första uppgiften, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på KTH canvas (Extentor).

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng. Betygsgränssarna finns på KTH social (kurs-PM).

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ρ, θ, z) är cylinderkoordinater definierade genom $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. (r, θ, φ) är sfäriska koordinater definierade genom $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

1. (a) En cirkulär strömslinga med radien R och strömstyrkan I befinner sig i xy -planet i magnetfältet $\mathbf{B} = (B_0x, 0, 0)$. Bestäm kraften $\mathbf{F}$ på strömslingan. (B_0 och I är konstanter.)

Ledning: $\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ där $C: \mathbf{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)$ med t från 0 till 2π .

- (b) Bestäm funktionen $f(\rho)$ så att $\text{rot}(f(\rho)\mathbf{e}_\varphi) = \rho\mathbf{e}_z$ och $f(R) = 0$ där $R > 0$ är en konstant. (3+3p)

2. (a) Beräkna integralen

$$\oint_S (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times d\mathbf{S}$$

där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor och S begränsningsytan till en kropp med volymen V .

- (b) Beräkna cirkulationen av vektorfältet

$$\mathbf{B} = \frac{1}{[(x-2)^2 + (y-3)^2]}[(y-3)\mathbf{e}_x - (x-2)\mathbf{e}_y]$$

omkring cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ (valfri orientering). (3+3p)

3. (a) f, g är skalärfält och $\mathbf{A}$ är ett vektorfält. Är följande påstående korrekt? Om ja, bevisa det. Om inte, rätta till det och bevisa det rättade påståendet.

(i) $\text{div}(f \text{ grad } g - g \text{ grad } f) = 0$ om $\Delta f = f$ och $\Delta g = g$

(ii) $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ är lika med $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

- (b) Beräkna $\text{div}((\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{r})$ där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor. (4+2p)

4. Paraboloidala koordinater (u, v, φ) är ortogonala och definieras av ekvationerna

$$x = uv \cos \varphi, \quad y = uv \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$

och skalfaktorerna är $h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$, $h_\varphi = uv$.

(a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = \sqrt{u^2 + v^2}(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v)$ är konservativt, och bestäm en skalärpotential till $\mathbf{F}$.

(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{B} = (u - v)\mathbf{e}_\varphi$ har en vektorpotential. Bestäm en vektorpotential $\mathbf{A}$ till $\mathbf{B}$ som uppfyller $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{A} = 0$. *Ledning:* Gör ansatsen $A_u = A_v = a(u^2 + v^2)^b$. (3+3p)

5. Maxwells ekvationer kan skrivas som

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

där $\mathbf{E}$ är elektriska fältet, $\mathbf{B}$ magnetfältet, $\mathbf{J}$ strömtätheten, ρ laddningstätheten, och c ljusets hastighet.

(a) Visa att energitätheten $u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ och Poyntings vektor $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ uppfyller kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = \kappa$$

med en viss källtäthet κ som skall beräknas.

(b) Visa att, om $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ och $\rho = 0$, så uppfyller Poyntings vektor $\mathbf{S}$ en kontinuitets-ekvation

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} + \partial_j T_{ij} = 0$$

där T_{ij} definierar en tensor av ordning 2 som skall bestämmas (S_i är komponenterna av $\mathbf{S}$ i ett kartesisk koordinatsystem). *Ledning:* Kom ihåg uppgift 3(a)(ii). (6p)

6. Hastighetsfältet $\mathbf{u}$ hos en orkan uppfyller $\text{div } \mathbf{u} = 0$ och $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{w}$ med virvelstyrkan $\mathbf{w} = f(\rho)\mathbf{e}_z$, där $f(\rho) = w_0/(R^2\pi)$ om $0 \leq \rho < R$ och $f(\rho) = 0$ om $\rho > R$; $R > 0$ och w_0 är konstanter. Beräkna $\mathbf{u}$! *Ledning:* Gör ansatsen $\mathbf{u} = u_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi$. (6p)

LYCKA TILL!

Formelblad Vektoranalys

Följande formler gäller i ett ortogonalt, kroklinjigt koordinatsystem med koordinaterna u_1, u_2, u_3 , basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och skalfaktorerna h_1, h_2, h_3 :

- $d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$
- $\text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$
- $\text{div grad } \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$

där A_1, A_2 och A_3 är de kroklinjiga komponenterna av vektorfältet $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3.$$

Specialfall

Cylinderkoordinater: $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$

Sfäriska koordinater: $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$

ϵ - δ -relationen (tensornotation)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

Stokes sats (tensornotation)

$$\iint_S \epsilon_{rst} \frac{\partial A_{jk\dots}}{\partial x_t} dS_s = \oint_C A_{jk\dots} dx_r$$

Gauss sats (tensornotation)

$$\iiint_V \frac{\partial A_{jk\dots}}{\partial x_i} dV = \oiint_S A_{jk\dots} dS_i$$

Lösningsföreslag tentamen SI1146 och SI1140 Del 1, 16 augusti 2017

1. (a)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= I \int_0^{2\pi} dt R(-\sin t, \cos t, 0) \times B_0 R(\cos t, 0, 0) = IB_0 R^2 \int_0^{2\pi} (0, 0, -\cos^2(t)) dt \\ &= \boxed{-IB_0 R^2 \pi(0, 0, 1)}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\text{rot } f(\rho)\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \rho f(\rho) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho f(\rho)) = \rho\mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \partial_\rho(\rho f(\rho)) &= \rho^2 \Rightarrow \rho f(\rho) = \frac{1}{3}\rho^3 + c\end{aligned}$$

där c är en integrationskonstant. Detta ger $f(\rho) = (1/3)\rho^2 + c/\rho$, och $f(R) = (1/3)R^2 + c/R = 0$ ger $c = -(1/3)R^3$. $\Rightarrow \boxed{f(\rho) = (1/3)[\rho^2 - R^3/\rho]}$.

2. (a)

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i \cdot \oint_S (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times d\mathbf{S} &= \oint_S \epsilon_{ijk} [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]_j dS_k \\ &= \iiint_V \partial_k \epsilon_{ijk} [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]_j dV = \iiint_V \partial_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} a_l x_m dV = \iiint_V \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{jlk}}_{=-\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilk} = -2\delta_{il}} a_l dV \\ &= -2a_i V = \mathbf{e}_i \cdot (-2\mathbf{a}V)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Svar:

$$\boxed{\oint_S (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times d\mathbf{S} = -2\mathbf{a}V}$$

(b) Med variabelbyte $x - 2 = u$, $y - 3 = v$ blir cirkulationen

$$\int_C \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2}$$

där C är kurvan $(u + 2)^2 + (v + 3)^2 = 16$. Detta är en standardintegral i kursen som löstes flera gånger under kursens gång med olika metoder. Kurvan omsluter origon $u = v = 0$, och integralen har samma värde -2π för alla linjer som omsluter $u = v = 0$. (Valfri orientering betyder att svaret 2π är också OK.)

(Ett sätt att visa detta är följande: Integralen kan beräknas med variabelbyte $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$ där $\rho = \rho(\varphi)$, och detta ger

$$\int_C \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho \sin \varphi d\rho \cos \varphi - \rho \cos \varphi d\rho \sin \varphi}{\rho^2} = (\dots) = - \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi$$

(där $d\rho \cos \varphi = \rho'(\varphi) \cos \varphi d\varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi d\varphi$ osv.) oberoende av $\rho(\varphi)$.)

3. (a) (i)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) &= \partial_i(f \partial_i g - g \partial_i f) \\ &= (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \underbrace{\Delta g}_{=g} - (\nabla g) \cdot (\nabla f) - g \underbrace{\Delta f}_{=f} = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Påståendet är sant

(ii)

$$\begin{aligned}[\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j \partial_l A_m \\ &= A_j \partial_i A_j - A_j \partial_j A_i = \frac{1}{2} \partial_i (A_j A_j) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) A_i = [(1/2) \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}]_i\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Påståendet är inte sant. Sant är

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

(b)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}((\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{r}) &= \nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})) \\ &= \partial_i(a_i x_j x_j - x_i a_j x_j) = 2a_i x_i - 3a_j x_j - x_i a_i = -2a_i x_i = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\end{aligned}$$

4. (a) $\mathbf{F}$ konservativ $\Leftrightarrow$ det finns Φ : $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \Phi$

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{h_u} \partial_u \Phi \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v} \partial_v \Phi \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_\varphi} \partial_\varphi \Phi \mathbf{e}_\varphi = \sqrt{u^2 + v^2} (u \mathbf{e}_u + v \mathbf{e}_v)$$

ger

$$\frac{1}{h_u} \partial_u \Phi = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \partial_u \Phi = \sqrt{u^2 + v^2} u \Rightarrow \Phi = \frac{1}{4} (u^2 + v^2)^2 + c_1(v, \varphi)$$

$$\frac{1}{h_v} \partial_v \Phi = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \partial_v \Phi = \sqrt{u^2 + v^2} v \Rightarrow \Phi = \frac{1}{4} (u^2 + v^2)^2 + c_2(\varphi)$$

$$\frac{1}{h_\varphi} \partial_\varphi \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{4} (u^2 + v^2)^2 + c_3$$

$\Rightarrow \boxed{\Phi = (1/4)(u^2 + v^2)^2}$ är en potential till $\mathbf{F}$, och det visar att $\mathbf{F}$ är konservativ.

(b) $A_\varphi = 0$ ger

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{(u^2 + v^2)uv} \begin{vmatrix} \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_u & \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_v & uv \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_u & \partial_v & \partial_\varphi \\ \sqrt{u^2 + v^2} A_u & \sqrt{u^2 + v^2} A_v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)uv} \left(-\sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_u \partial_\varphi (\sqrt{u^2 + v^2}) A_v + \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_v \partial_\varphi (\sqrt{u^2 + v^2}) A_u \right. \\ &\quad \left. + uv \mathbf{e}_\varphi (\partial_u (\sqrt{u^2 + v^2}) A_v - \partial_v (\sqrt{u^2 + v^2}) A_u) \right) = (u - v) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_\varphi A_u = \partial_\varphi A_v = 0$$

$$\frac{1}{u^2 + v^2} \partial_u (\sqrt{u^2 + v^2}) A_v = u, \quad \frac{1}{u^2 + v^2} \partial_v (\sqrt{u^2 + v^2}) A_u = v.$$

Ledningen ger

$$\frac{1}{u^2 + v^2} \partial_u a(u^2 + v^2)^{b+1/2} = a(2b+1)(u^2 + v^2)^{b-3/2} u = u$$

$$\frac{1}{u^2 + v^2} \partial_v a(u^2 + v^2)^{b+1/2} = a(2b+1)(u^2 + v^2)^{b-3/2} v = v$$

dvs $b = 3/2$, $a = 1/4$.

Svar: $\mathbf{A} = \frac{1}{4}(u^2 + v^2)^{3/2}(\mathbf{e}_u + \mathbf{e}_v)$ är en vektorpotential till $\mathbf{B}$.

5. (a)

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot (c\nabla \times \mathbf{B} - c\mathbf{J}) + \mathbf{B} \cdot (-c\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= c(\epsilon_{ijk} E_i \partial_j B_k - \epsilon_{ijk} B_i \partial_j E_k) - c\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = c\epsilon_{jik} (-E_i \partial_j B_k - B_k \partial_j E_i) - c\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \\ &= -\partial_j \underbrace{c\epsilon_{jik} E_i B_k}_{S_j} - c\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - c\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \end{aligned}$$

dvs. $\kappa = -c\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ v.s.v.

(b) Med $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ och lösningen till 3(a)(ii)

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{S} &= c(c\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + c\mathbf{E} \times (-c\nabla \times \mathbf{E}) = -c^2(\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})) \\ &= -c^2((1/2)\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (1/2)\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}) \end{aligned}$$

dvs., p.g.a. $\partial_k E_k = \rho = 0$, $\partial_k B_k = 0$,

$$\partial_t S_i = -c^2[(1/2)\partial_i(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \underbrace{E_k \partial_k E_i}_{\partial_k(E_i E_k)} - \underbrace{B_k \partial_k B_i}_{=\partial_k(B_i B_k)}] \equiv -\partial_k T_{ik}$$

där

$$T_{ik} = c^2 \left(\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k \right)$$

v.s.v.

6. (Obs att det är samma matematiska problem som E10.2 men lättare p.g.a. ledningen ($\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{u}$, $\mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{w}$). Lösningföreslaget här är kortfattad, men det finns en mer detaljerad lösning av E10.2 på kurshemsidan.)

Med ledningen,

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \partial_\varphi u_\varphi = 0$$

$$\text{rot}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ 0 & \rho u_\phi & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_\rho \partial_z u_\varphi + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \partial_\rho (\rho u_\varphi) = \mathbf{w} = f(\rho) \mathbf{e}_\rho$$

$\Rightarrow \partial_\varphi u_\varphi = \partial_z u_\varphi = 0$ och $(1/\rho)\partial_\rho(\rho u_\varphi) = f(\rho)$. Detta ger $u_\varphi = g(\rho)$ där

$$\partial_\rho(\rho g(\rho)) = \rho f(\rho) \Rightarrow g(\rho) = \begin{cases} \frac{w_0}{2R^2\pi}\rho + c_1/\rho & 0 \leq \rho < R \\ c_2/\rho & \rho > R \end{cases}$$

med integrationskonstanter $c_{1,2}$. Kraven att $g(0) < \infty$ ger $c_1 = 0$. Kraven att $g(\rho)$ är kontinuerligt vid $\rho = R$ ger $w_0/2R\pi = c_2/R \Rightarrow c_2 = w_0/2\pi$.

Svar:

$$\mathbf{u} = g(\rho)\mathbf{e}_\varphi, \quad g(\rho) = \begin{cases} \frac{w_0}{2R^2\pi}\rho & 0 \leq \rho < R \\ \frac{w_0}{2\pi\rho} & \rho > R \end{cases}$$