

SK1104 Klassisk fysik

Lösningsförslag till tentamen

Fredagen den 11 mars, 2022, 08:00-10:30

Del A - 1p per deluppgift

1. a) Potentialskillnaden är som störst mellan punkt B (närmast laddningen) och punkt D (längst bort från laddningen). Eftersom den elektriska potentialen på ett avstånd r från en punktladdning q är

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \Delta V = V_B - V_D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{4d} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Insättning av värden ger att

$$\Delta V = \frac{3}{4} \cdot \frac{15 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} \cdot 0,10} \text{ V} \approx 1,0 \text{ kV}$$

b) Följande två alternativ är korrekta (0,5p för varje rätt svar och -0,5p för varje felaktigt svar)

$$\text{A: } V_1 - R_2 i_2 - R_4 i_3 = 0$$

$$\text{C: } R_3 i_1 + R_5 i_3 - R_3 i_4 - R_5 i_4 = 0$$

c) Magnetfältet från en rak, lång ledare är

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Det finns nu fyra olika fall, varav två är principiellt olika från varandra. Låt oss börja med fallet när strömmen i båda ledningarna går åt samma håll. Då blir absolutvärdet av magnetfältet mitt mellan ledarna

$$B_{tot} = \frac{\mu_0}{2\pi r} (I_{55} - I_{25}) \Rightarrow B_{tot} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 1,0} (55 - 25) \text{ T} = 6 \mu\text{T}$$

Om strömmen istället går åt olika håll i ledningarna, får vi att

$$B_{tot} = \frac{\mu_0}{2\pi r} (I_{55} + I_{25}) \Rightarrow B_{tot} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 1,0} (55 + 25) \text{ T} = 16 \mu\text{T}$$

Beroende på hur ledningarna ligger i förhållande till varandra, kan fältet vara riktat antingen uppåt eller nedåt från det plan där de båda ledningarna ligger. Det är fältets riktning från ledaren med strömmen 55 A som avgör riktningen på fältet.

Del B - 4p per uppgift

2. a) Eftersom det finns två lager av material inuti kondensatorn (luften och dielektrikat) som vardera har olika dielektricitetskonstant, är dessa båda material seriekopplade med varandra. Det betyder att kapacitansen hos hela kondensatorn kan modelleras som två seriekopplade kapacitanser C_l (luft) och C_d

(dielektrika), där vardera kondensatorn motsvarar vardera materialet. Låt tjockleken av luftlagret vara $a = 2,0$ mm och tjockleken av dielektrikat vara $b = 2,0$ mm (ger totala tjockleken $d = 4,0$ mm. Kapacitansen för hela kondensatorn fås då från formeln för seriekoppling av kondensatorer

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_l} + \frac{1}{C_d} \quad \text{där} \quad C_l = \frac{\epsilon_0 A}{a} \quad \text{och} \quad C_d = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{b}$$

Detta ger att

$$\frac{1}{C} = \frac{a}{\epsilon_0 A} + \frac{b}{\epsilon_r \epsilon_0 A} = \frac{\epsilon_r a + b}{\epsilon_r \epsilon_0 A} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{\epsilon_r a + b}$$

Insättning av värden ger att

$$C = \frac{3,0 \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} \cdot 4,0 \cdot 10^{-4}}{3,0 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3} + 2,0 \cdot 10^{-3}} \text{ F} = 1,33 \text{ pF}$$

b) En ökning av kapacitansen med 30% betyder att vi ska hitta en ny tjocklek b_1 hos det dielektriska skiktet som leder till att kapacitansen $C_1 = 1,30 \cdot C$. Med hjälp av det allmänna uttrycket för kapacitansen från tidigare, får vi att

$$\frac{C_1}{C} = 1,30 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{\epsilon_r a_1 + b_1} \cdot \frac{\epsilon_r a + b}{\epsilon_r \epsilon_0 A} = \frac{\epsilon_r a + b}{\epsilon_r a_1 + b_1}$$

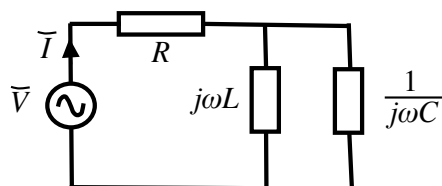
Utnyttja nu att $a_1 + b_1 = d = 4,0$ mm, där a_1 är tjockleken av luftlagret och b_1 är tjockleken av dielektrikat, vilket betyder att

$$\frac{C_1}{C} = 1,30 = \frac{\epsilon_r a + b}{\epsilon_r d - \epsilon_r b_1 + b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{\epsilon_r d - \frac{\epsilon_r a + b}{1,30}}{\epsilon_r - 1}$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$b_1 = \frac{\left(3,0 \cdot 4,0 - \frac{3,0 \cdot 2,0 + 2,0}{1,30}\right) \cdot 10^{-3}}{3,0 - 1} \text{ m} = 2,9 \text{ mm}$$

3. a) Börja med att rita upp den ekvivalenta kretsen enligt $j\omega$ -metoden.



I denna figur har vi att $V_{rms} = 40$ V, $R = 50$ Ω , $C = 10$ μ F och $L = 1,0$ mH. Den totala impedansen i kretsen beräknas med hjälp av formeln för serie- och parallellkoppling av resistorer.

$$Z = R + Z_{LC} \quad \text{där} \quad \frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega L}$$

Detta betyder att

$$Z = R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \Rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}$$

och strömmens rms-värde kan då tecknas

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{|Z|} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}}$$

Effekten i kretsen utvecklas i resistorn, varför vi har att

$$P = R \cdot I_{rms}^2 = \frac{RV_{rms}^2}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}$$

Insättning av värden ger att effekten

$$P = \frac{50 \cdot 40^2}{50^2 + \left(\frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{1 - 4\pi^2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}}\right)^2} \text{ W} = 31 \text{ W}$$

b) Resonans i LC -delen av kretsen erhålls när

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega^2 LC = 1 \quad (\omega = 10^4 \text{ rad/s})$$

Detta betyder i sin tur att den reaktiva delen av Z helt kommer att dominera eftersom nämnaren går mot noll och vi har att

$$Z = R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \approx \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \rightarrow \infty \Rightarrow I_{rms} = \frac{V_{rms}}{|Z|} \approx 0$$

Strömmen genom resistorn kommer således att vara noll (eller näst intill noll i en verklig krets) och nästan hela spänningen ligger över de reaktiva komponenterna.

4. Eftersom det är rimligt att anta att kopparlindningen endast har en liten försumbar resistans (ganska kort och med relativt stor tvärsnittsarea enligt figuren), kommer spänningen över densamma endast uppkommer på grund av induktion. Detta betyder att

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow L = -\frac{\varepsilon}{\left(\frac{di}{dt}\right)}$$

Eftersom strömmen $i(t) = I_{max} \cos(\omega t)$, får vi att

$$\frac{di}{dt} = -\omega I_{max} \sin(\omega t) \Rightarrow L = \frac{\varepsilon_{max}}{\omega I_{max}} = \frac{\varepsilon_{max}}{2\pi f I_{max}}$$

Strömmens toppvärde I_{max} kan bestämmas från toppvärdet av magnetfältet i mitten av spiralen. Fältet skapas av strömmen i spiralen och för att modellera

fältet kan vi approximera att det utgör summan av 30 olika bidrag från cirkulära strömslingor med olika diametrar. Enligt vad som har härletts i boken är magnetfältet längs centrallinjen av en cirkulär slinga

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

där $x = 1,5$ cm i vårt fall och a är medelradien hos ett varv av spiralen. Eftersom innerradien är 2,0 cm och ytterradien är 8,0 cm hos spiralen, får vi att skillnaden i radie mellan två på varandra efterföljande spiralslingor är

$$\Delta r = \frac{8,0 - 2,0}{30} \text{ cm} = 0,20 \text{ cm}$$

Detta ger att medelvärdet av radien hos den innersta spiralslingan är

$$r_1 = \frac{2,0 + 8,0}{2} \text{ cm} = 5,0 \text{ cm} \Rightarrow r_i = 5,0 + 0,20 \cdot i \text{ cm}$$

Formellt sett kan vi då teckna magnetfältet i mitten av spiralen som

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \sum_{i=1}^{i=30} \frac{r_i^2}{(x^2 + r_i^2)^{3/2}}$$

Detta är en jobbig summation att göra och vid tentamen får du givetvis använda dig av vettiga approximationer. Den enklaste approximationen är att ta ett medelvärde mellan den innersta och den yttersta cirkeln i spiralen och anta att alla cirklar ger detta bidrag i medeltal. Det ger oss att

$$B \approx \frac{\mu_0 I}{2} \cdot N \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r_1^2}{(x^2 + r_1^2)^{3/2}} + \frac{r_{30}^2}{(x^2 + r_{30}^2)^{3/2}} \right)$$

där $N = 30$, $r_1 = 2,1$ cm och $r_{30} = 7,9$ cm. Lös sedan ut I från denna ekvation.

$$I \approx \frac{4B}{\mu_0 N \left(\frac{r_1^2}{(x^2 + r_1^2)^{3/2}} + \frac{r_{30}^2}{(x^2 + r_{30}^2)^{3/2}} \right)}$$

Med ett toppvärde $B_{max} = 15 \mu\text{T}$ får vi via insättning att $I_{max} = 42$ mA. Tillammans med toppvärdet på spänningen som är $20 \cdot \sqrt{2}$ V får vi att induktansen är

$$L = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot 42 \cdot 10^{-3}} \text{ H} = 4,4 \text{ mH}$$

Det finns många olika sätt att medelvärdesbilda över spiralen och för att underlätta jämförelsen med andra sätt, finns i tabellen nedan de uträknade värdena för varje spiral i lindningen

Summering av alla termer i denna tabell ger

$$I = \frac{2B}{\mu_0 \cdot \sum_{i=1}^{i=30} \frac{r_i^2}{(x^2 + r_i^2)^{3/2}}} \quad I = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,4718} \text{ A} = 43,6 \text{ mA}$$

vilket visar att den approximation som gjordes ovan är fullt rimlig.

i	r_i (cm)	$\frac{r_i^2}{(x^2 + r_i^2)^{3/2}}$ (cm ⁻¹)	i	r_i (cm)	$\frac{r_i^2}{(x^2 + r_i^2)^{3/2}}$ (cm ⁻¹)	i	r_i (cm)	$\frac{r_i^2}{(x^2 + r_i^2)^{3/2}}$ (cm ⁻¹)
1	2.1	0.2566	11	4.1	0.2020	21	6.1	0.1501
2	2.3	0,2555	12	4.3	0.1958	22	6.3	0.1461
3	2.5	0,2522	13	4.5	0.1897	23	6.5	0.1423
4	2.7	0.2474	14	4.7	0.1840	24	6.7	0.1387
5	2.9	0,2416	15	4.9	0.1784	25	6.9	0.1352
6	3.1	0.2353	16	5.1	0.1731	26	7.1	0.1319
7	3.3	0.2286	17	5.3	0.1681	27	7.3	0.1288
8	3.5	0.2219	18	5.5	0.1633	28	7.5	0.1257
9	3.7	0.2151	19	5.7	0.1587	29	7.7	0.1228
10	3.9	0.2085	20	5.9	0.1543	30	7.9	0.1200

Tabell 1: Beräknade bidrag till fältet för ringar med olika radier, r_i .