

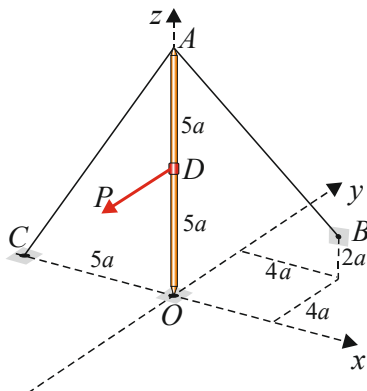
Tentamen i SG1112 Mekanik I

Varje uppgift ger högst 6 poäng. Skrivtid: 5 h

OBS! Uppgifterna 1- 8 skall inlämnas på **separata** papper. **Inga hjälpmedel** förutom papper, penna, linjaler, passare.

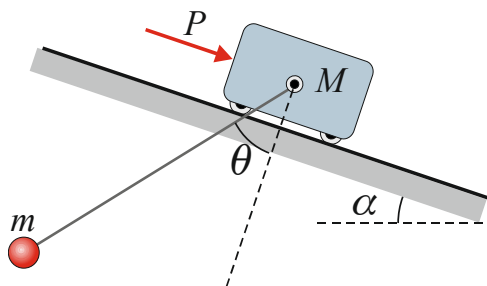
Lycka till! Problem

1)



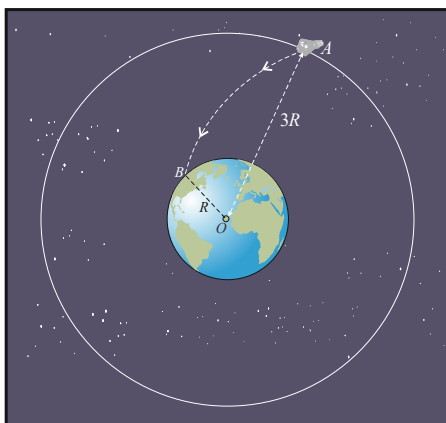
En lätt vertikal mast OA påverkas av en horisontell kraft med beloppet P i punkten D som ligger i mitten av masten. Denna kraft är parallell men motriktad y -axeln. Masten hålls i jämvikt med hjälp av två kablar AB och AC fästa i änden A samt i B och C enligt figuren. Masten är fäst i O med hjälp av en kulle. Bestäm beloppen av spännkrafterna S_1 och S_2 i AB respektive AC .

2)



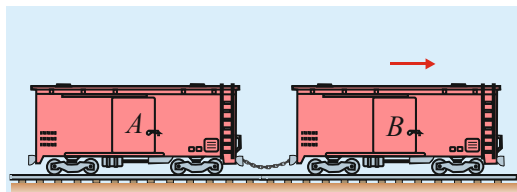
En liten vagn med massan M rör sig utmed ett lutande plan med lutningsvinkeln α under inverkan av en konstant kraft P som är parallell med lutande planet. En partikel med massan m är fäst i en lätt stav som i sin tur är fäst i vagnen i en lätt roterande led. Staven med partikeln bildar en konstant vinkel θ med riktningen vinkelrät mot planet. Bestäm denna vinkel θ och ange dess värde speciellt om $P = 0$. Bortse från alla friktionsförluster.

3)



En rymdfarkost med massan m kretsar kring jorden i en cirkulär bana med radien $3R$. I punkten A ändras farkostens hastighetsriktning så att den färdas i en ny bana (från A till B) för att landa på jorden. Farkostens fart i punkten A (lika med farten vid den cirkulära banan) minskas till praktiskt taget noll vid landning genom inbromsningen i jordens atmosfär och sedan ytterligare med hjälp av fallskärmar. Bestäm det arbete U_{A-B}^{fr} som luftmotståndet utövar på farkosten under hela inbromsningen. Arbetet skall uttryckas med hjälp av farkostens massa m , tyngdaccelerationen vid jordytan g , samt jordens radie R .

4)



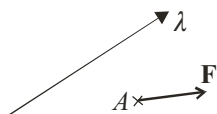
Betrakta två godsvagnar A och B med lika massa m . Vagnarna är från början i vila och hopkopplade med en slack kedja då vagnen B får en hastighet åt höger. Kedjan spänns och det uppstår en stöt mellan vagnarna med studstalet e . Bestäm kvoten $\Delta T / T$ mellan systemets energiförlust vid stöten ΔT och systemets kinetiska energi strax före stöten, T .

V.g. vänd!

Teori

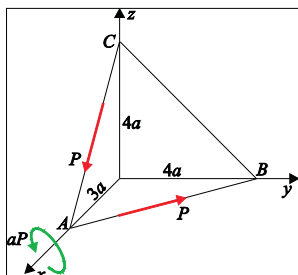
5) a. Definiera vad som menas med två ekvimomenta kraftsystem $(\mathbf{F}_1)_1, \dots, (\mathbf{F}_n)_1$ och $(\mathbf{F}_1)_2, \dots, (\mathbf{F}_m)_2$ samt visa att de har lika moment med avseende på alla punkter. (2p)

b.



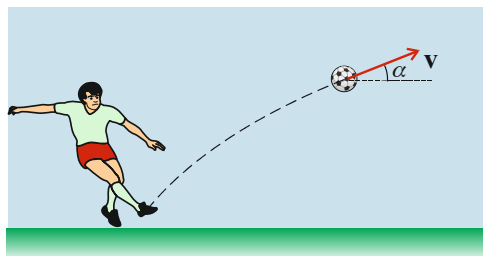
Definiera vad som menas med momentet M_λ av kraften $\mathbf{F}$ angripande i A med avseende på axeln λ och visa att det är oberoende av momentpunkten på axeln. (2p)

c.



Betrakta ett kraftsystem bestående av två krafter vardera med beloppet P och riktningarna enligt figuren samt ett kraftparsmoment med beloppet aP och riktningen längs x -axeln enligt figuren. Bestäm om detta system har en enkraftsresultant och ange den i så fall. Motivera ditt svar. (2p)

6) a.



Betrakta bollen som sparkas av en spelare. Vid det betraktade ögonblicket är bollens fart $v = 10 \text{ m/s}$ och dess hastighetsriktning bildar vinkeln $\alpha = 30^\circ$ med horisontalen. Bollen antas vara påverkad av endast tyngdkraften. I detta ögonblick bestäm bollens fartändring $\dot{v}$ samt banans krökningsradie ρ . Vid beräkningar använd $g = 10 \text{ m/s}^2$. (2p)

b. Härled lagen om den kinetiska energin (dvs. sambandet mellan arbetet och ändringen av den kinetiska energin) för en partikel. (2p)

c. Definiera vad som menas med en konservativ kraft och härled uttrycket för konservativa kraftens arbete U_{1-2} . (2p)

7) a. Definiera rörelsemängdsmomentet $\mathbf{H}_O$ för en partikel och härled momentekvationen. (2p)

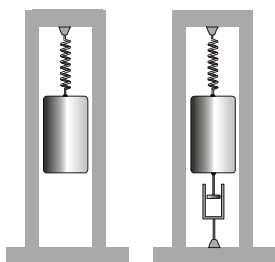
b. Betrakta två partiklar som sammanstötter och visa att deras totala rörelsemängd bevaras under stöt. (2p)

c. Betrakta en partikel som rör sig under inverkan av en centrkraft och bevisa att partikelbanan ligger i ett fixt plan genom kraftcentrum. (2p)

8) a. Rita en tydlig figur och härled uttrycket för sektorhastigheten $\dot{A}$ vid centralrörelse samt visa att den är konstant. (2p)

b. Härled uttrycket för radialkomponenten av accelerationen vid centralrörelse (Binets formel) (2p)

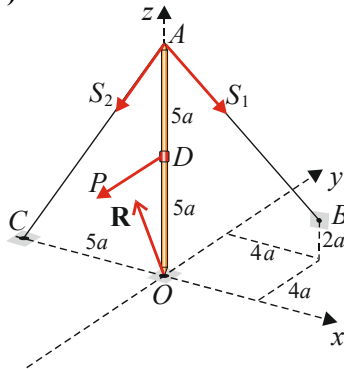
c.



Betrakta en partikel upphängd i en lätt fjäder som först utför fria odämpade svängningar med perioden τ_n varefter man fäster en viskös dämpare till partikeln så att den utför fria svagt dämpade svängningar med perioden τ_d . Man observerar följande samband mellan perioderna, $\tau_d = \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_n$. Bestäm värdet på dämpningskvoten ζ i det andra fallet. (2p)

Lösningar till SG1112 Mekanik I

1)



1) Skriv spännkrafterna på vektorform

$$A(0,0,10)a; \quad B(4,4,2)a; \quad C(-5,0,0)a$$

$$\mathbf{r}_{AB} = (4,4,-8)a = 4(1,1,-2)a;$$

$$\mathbf{r}_{AC} = (-5,0,-10)a = -5(1,0,2)a$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}; \quad \mathbf{e}_{AC} = -\frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} \Rightarrow \quad \mathbf{S}_1 = \frac{S_1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$\mathbf{S}_2 = -\frac{S_2}{\sqrt{5}}(1,0,2); \quad \mathbf{F}_1 = (0-P,0)$$

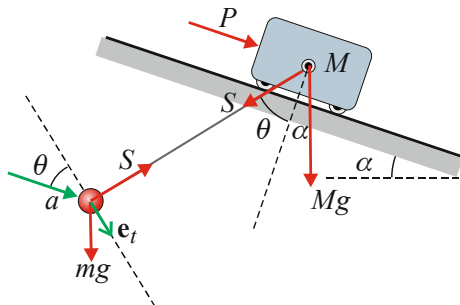
2) Momentekvationen med avs. på O ger

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) + \mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{0} \text{ eller}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 10a \\ \frac{S_1}{\sqrt{6}} - \frac{S_2}{\sqrt{5}} & \frac{S_1}{\sqrt{6}} & -\frac{2S_1}{\sqrt{6}} - \frac{2S_2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 5a \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_x: -\frac{10aS_1}{\sqrt{6}} + 5aP = 0 \\ \mathbf{e}_y: \frac{S_1}{\sqrt{6}} - \frac{S_2}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}P}}, \quad \underline{\underline{S_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}S_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}P}}$$

2)



1) Betrakta *hela systemet* och formulera kraftekvationen i riktningen parallellt med planet

$$\Rightarrow: (m+M)a = P + (m+M)g \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{P}{m+M} + g \sin \alpha \quad (1)$$

2) Betrakta nu *endast partikeln* och formulera kraftekvationen i tangentialriktningen (vinkelrät mot staven)

$$\mathbf{e}_t: ma \cos \theta = mg \sin(\theta + \alpha)$$

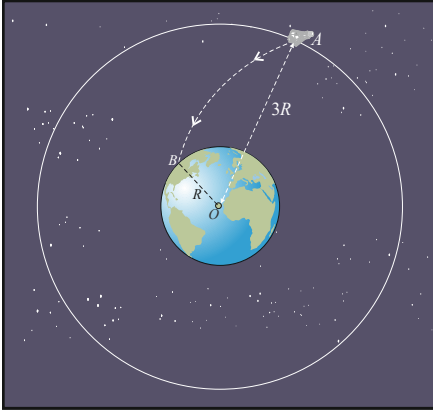
vilket tillsammans med (1) ger

$$\frac{P}{m+M} \cos \theta + g \sin \alpha \cos \theta = g \sin(\theta + \alpha) \text{ eller}$$

$$\frac{P}{m+M} \cos \theta + g \sin \alpha \cos \theta = g(\sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta) \Rightarrow \underline{\underline{\tan \theta = \frac{P}{(m+M)g \cos \alpha}}}$$

För $P = 0$ fås $\tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$.

3)



1) Bestäm satellitens fart i den cirkulära banan

$$\mathbf{e}_n: m \frac{v^2}{3R} = G \frac{mM}{(3R)^2} \Rightarrow v_A = v = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \sqrt{\frac{gR}{3}} \quad (1)$$

2) Använd lagen om den kinetiska energin

$$U_{A-B} = T_B - T_A = 0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{1}{6}mgR \quad (2)$$

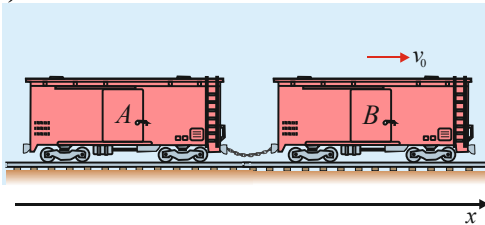
3) Dela upp arbetet i gravitationskraftens arbete och friktionsarbetet. Med $V^{gr} = -mg \frac{R^2}{r}$ fås

$$U_{A-B} = U_{A-B}^{gr} + U_{A-B}^{fr} = V_A^{gr} - V_B^{gr} + U_{A-B}^{fr} = -\frac{1}{3}mgR + mgR + U_{A-B}^{fr} = \frac{2}{3}mgR + U_{A-B}^{fr} \quad (3)$$

4) Ekvationerna (1), (2) och (3) ger tillsammans

$$\underline{\underline{U_{A-B}^{fr} = -\frac{5}{6}mgR}}$$

4)



1) Systemets rörelsemängd bevaras under stöt

$$\Rightarrow p_x = p_x' \Rightarrow mv_0 = mv_{1x}' + mv_{2x}' \Rightarrow v_{1x}' + v_{2x}' = v_0 \quad (1)$$

2) Definitionen på studstalet ger

$$e = \frac{v_{2x}' - v_{1x}'}{v_{1x} - v_{2x}} = \frac{v_{2x}' - v_{1x}'}{0 - v_0} \Rightarrow v_{1x}' - v_{2x}' = ev_0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \underline{\underline{v_{1x}' = \frac{1+e}{2}v_0}}, \quad (1) - (2) \Rightarrow \underline{\underline{v_{2x}' = \frac{1-e}{2}v_0}}$$

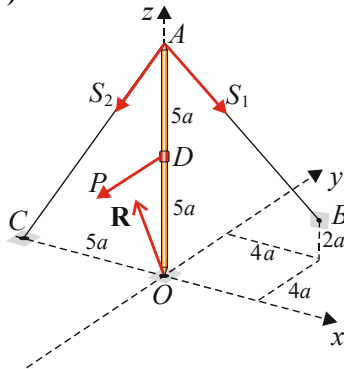
3) Låt oss nu bestämma energiförlusten vid denna stöt

$$\Delta T = T' - T = \frac{m}{2} [v_{1x}'^2 + v_{2x}'^2 - v_0^2] = \frac{mv_0^2}{2} \left[\frac{(1+e)^2}{4} + \frac{(1-e)^2}{4} - 1 \right] = \frac{mv_0^2}{2} \left[\frac{2+2e^2-4}{4} \right] = -\frac{1-e^2}{4}mv_0^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1-e^2}{2}}}$$

Lösningar till SG1112 Mekanik I

1)



1) Skriv spännkrafterna på vektorform

$$A(0,0,10)a; \quad B(4,4,2)a; \quad C(-5,0,0)a$$

$$\mathbf{r}_{AB} = (4,4,-8)a = 4(1,1,-2)a;$$

$$\mathbf{r}_{AC} = (-5,0,-10)a = -5(1,0,2)a$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}; \quad \mathbf{e}_{AC} = -\frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} \Rightarrow \quad \mathbf{S}_1 = \frac{S_1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$\mathbf{S}_2 = -\frac{S_2}{\sqrt{5}}(1,0,2); \quad \mathbf{F}_1 = (0-P,0)$$

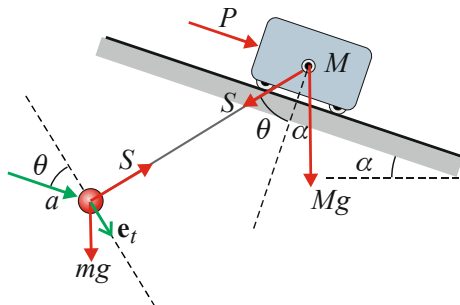
2) Momentekvationen med avs. på O ger

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) + \mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{0} \text{ eller}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 10a \\ \frac{S_1}{\sqrt{6}} - \frac{S_2}{\sqrt{5}} & \frac{S_1}{\sqrt{6}} & -\frac{2S_1}{\sqrt{6}} - \frac{2S_2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 5a \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_x: -\frac{10aS_1}{\sqrt{6}} + 5aP = 0 \\ \mathbf{e}_y: \frac{S_1}{\sqrt{6}} - \frac{S_2}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}P}}, \quad \underline{\underline{S_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}S_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}P}}$$

2)



1) Betrakta *hela systemet* och formulera kraftekvationen i riktningen parallellt med planet

$$\Rightarrow: (m+M)a = P + (m+M)g \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{P}{m+M} + g \sin \alpha \quad (1)$$

2) Betrakta nu *endast partikeln* och formulera kraftekvationen i tangentialriktningen (vinkelrät mot staven)

$$\mathbf{e}_t: ma \cos \theta = mg \sin(\theta + \alpha)$$

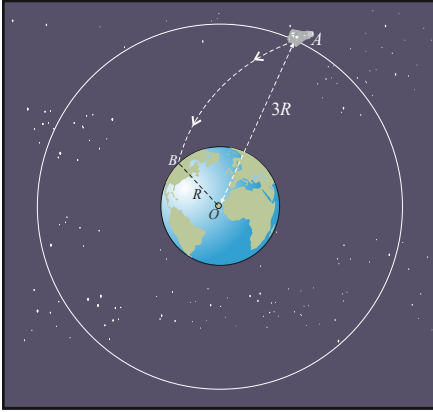
vilket tillsammans med (1) ger

$$\frac{P}{m+M} \cos \theta + g \sin \alpha \cos \theta = g \sin(\theta + \alpha) \text{ eller}$$

$$\frac{P}{m+M} \cos \theta + g \sin \alpha \cos \theta = g(\sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta) \Rightarrow \underline{\underline{\tan \theta = \frac{P}{(m+M)g \cos \alpha}}}$$

För $P = 0$ fås $\tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$.

3)



1) Bestäm satellitens fart i den cirkulära banan

$$\mathbf{e}_n: m \frac{v^2}{3R} = G \frac{mM}{(3R)^2} \Rightarrow v_A = v = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \sqrt{\frac{gR}{3}} \quad (1)$$

2) Använd lagen om den kinetiska energin

$$U_{A-B} = T_B - T_A = 0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{1}{6}mgR \quad (2)$$

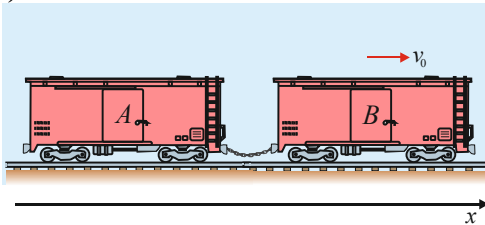
3) Dela upp arbetet i gravitationskraftens arbete och friktionsarbetet. Med $V^{gr} = -mg \frac{R^2}{r}$ fås

$$U_{A-B} = U_{A-B}^{gr} + U_{A-B}^{fr} = V_A^{gr} - V_B^{gr} + U_{A-B}^{fr} = -\frac{1}{3}mgR + mgR + U_{A-B}^{fr} = \frac{2}{3}mgR + U_{A-B}^{fr} \quad (3)$$

4) Ekvationerna (1) , (2) och (3) ger tillsammans

$$\underline{\underline{U_{A-B}^{fr} = -\frac{5}{6}mgR}}$$

4)



1) Systemets rörelsemängd bevaras under stöt

$$\Rightarrow p_x = p_x' \Rightarrow mv_0 = mv_{1x}' + mv_{2x}' \Rightarrow v_{1x}' + v_{2x}' = v_0 \quad (1)$$

2) Definitionen på studstalet ger

$$e = \frac{v_{2x}' - v_{1x}'}{v_{1x} - v_{2x}} = \frac{v_{2x}' - v_{1x}'}{0 - v_0} \Rightarrow v_{1x}' - v_{2x}' = ev_0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \underline{\underline{v_{1x}' = \frac{1+e}{2}v_0}}, \quad (1) - (2) \Rightarrow \underline{\underline{v_{2x}' = \frac{1-e}{2}v_0}}$$

3) Låt oss nu bestämma energiförlusten vid denna stöt

$$\Delta T = T' - T = \frac{m}{2} [v_{1x}'^2 + v_{2x}'^2 - v_0^2] = \frac{mv_0^2}{2} \left[\frac{(1+e)^2}{4} + \frac{(1-e)^2}{4} - 1 \right] = \frac{mv_0^2}{2} \left[\frac{2+2e^2-4}{4} \right] = -\frac{1-e^2}{4}mv_0^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1-e^2}{2}}}$$