

SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Lösningsförslag till tentamen
Måndag den 19 december 2022

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$.

(a) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = 1$, (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \left(y + \sqrt{y^2 + 3x^2} \right)$, $y(1) = 1$.

Lösningarna får ges på implicit form.

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Detta är en första ordningens linjär ekvation som kan lösas genom att multiplicera med en integrerande faktor. En sådan integrerande faktor är

$$e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2.$$

När vi multiplicerar med den integrerande faktorn får vi ekvationen

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} \right) = x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^2 \sin x,$$

där vänsterledet är derivatan av en produkt,

$$(x^2 y)' = x^2 \sin x.$$

Vi integrerar detta och får

$$x^2 y = \int x^2 \sin x dx = \{ \text{Formelblad (101)} \} = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C.$$

Eftersom $y(\pi) = 1$ har vi

$$\pi^2 \cdot 1 = (2 - \pi^2) \cos \pi + 2\pi \sin \pi + C = \pi^2 - 2 + C$$

så $C = 2$ och lösningen till initialvärdesproblemet är

$$y(x) = x^{-2} \left((2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + 2 \right).$$

(b) I denna ekvation är högerledet $F(x, y) = \frac{1}{x} \left(y + \sqrt{y^2 + 3x^2} \right)$ en homogen funktion av ordning noll,

$$F(tx, ty) = \frac{1}{tx} \left(ty + \sqrt{(ty)^2 + 3(tx)^2} \right) = \frac{1}{x} \left(y + \sqrt{y^2 + 3x^2} \right) = {}^t F(x, y).$$

Detta är alltså en homogen första ordningens differentialekvation och vi gör substitutionen $z = y/x$, $y = zx$. Detta ger ekvationen

$$\frac{dz}{dx} x + z = \frac{dy}{dx} = \frac{zx + \sqrt{(zx)^2 + 3x^2}}{x} = z + \sqrt{z^2 + 3}$$

för $z = z(x)$. Vi skriver om denna separabla ekvation som

$$\frac{dz}{dx} x = \sqrt{z^2 + 3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3}} dz = \frac{1}{x} dx$$

1

vilket integreras till (formelblad (32), (2))

$$\ln \left| z + \sqrt{z^2 + 3} \right| = \ln |x| + C.$$

Initialvillkoret $z(1) = y(1)/1 = 1$, så

$$\ln \left| 1 + \sqrt{1^2 + 3} \right| = \ln |1| + C = C$$

och $C = \ln 3$. Vi skriver om detta som

$$\ln \left| z + \sqrt{z^2 + 3} \right| = \ln |x| + \ln 3 = \ln |3x| \quad \Leftrightarrow \quad z + \sqrt{z^2 + 3} = 3x$$

vilket alltså är lösningen på implicit form. Om vi kvadrerar denna ekvation får vi

$$\begin{aligned} 9x^2 &= \left(z + \sqrt{z^2 + 3} \right)^2 = z^2 + 2z\sqrt{z^2 + 3} + (z^2 + 3) \\ &= z^2 + 2z(3x - z) + (z^2 + 3) = 6zx + 3, \end{aligned}$$

och vi löser ut

$$z(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x}.$$

□

2. Använd metoden med variation av parametrar för att hitta alla lösningar till ekvationen

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x$$

för $y = y(x)$, $x > 0$.

(4 p)

Lösningsförslag. För att lösa den homogena ekvationen

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

gör vi ansatsen $y = x^m$. Detta ger $m = 1$ som en dubbelrot, och den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x.$$

För variation av parametrar gör vi ansatsen

$$y(x) = v_1(x)x + v_2(x)x \ln x.$$

Derivatans av detta är

$$y' = v_1' x + v_2' x \ln x + v_1 + v_2(\ln x + 1).$$

Vi antar att

$$v_1' x + v_2' x \ln x = 0$$

så att

$$y' = v_1 + v_2(\ln x + 1).$$

Detta ger

$$y'' = v_1' + v_2'(\ln x + 1) + v_2 \frac{1}{x}.$$

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} 2x &= x^2 y'' - xy' + y \\ &= x^2 \left(v_1' + v_2'(\ln x + 1) + v_2 \frac{1}{x} \right) - x(v_1 + v_2(\ln x + 1)) + v_1 x + v_2 x \ln x \\ &= v_1' x^2 + v_2' x^2(\ln x + 1). \end{aligned}$$

Funktionerna $v_1(x)$, $v_2(x)$ ska alltså uppfylla

$$\begin{cases} v_1' x^2 + v_2' x^2(\ln x + 1) &= 2x \\ v_1' x + v_2' x \ln x &= 0 \end{cases},$$

eller om vi delar med x^2 resp. x ,

$$\begin{cases} v_1' + v_2'(\ln x + 1) &= \frac{2}{x} \\ v_1' + v_2' \ln x &= 0 \end{cases}.$$

Vi löser ut $v_1'(x)$, $v_2'(x)$ och får

$$v_1' = -\frac{2 \ln x}{x}, \quad v_2' = \frac{2}{x}.$$

Detta integreras till (se formelblad!)

$$v_1(x) = -(\ln x)^2 + C_1, \quad v_2(x) = 2 \ln x + C_2.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$\begin{aligned} y(x) &= v_1(x)x + v_2(x)x \ln x \\ &= \left(-(\ln x)^2 + C_1 \right) x + (2 \ln x + C_2) x \ln x \\ &= x(\ln x)^2 + C_1 x + C_2 x \ln x. \end{aligned}$$

□

3. Följande linjära system av differentialekvationer har koefficienter som beror på en parameter $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + (2a+1)y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases}.$$

Bestäm ett värde på a för vilket systemet har lösningar $(x(t), y(t))$ som är begränsade, men inte går mot noll då $t \rightarrow \infty$. (Det finns precis ett sådant värde.) För detta värde på parametern a , bestäm alla lösningar till systemet. **(4 p)**

Lösningsförslag. Med $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ kan vi skriva systemet på matrisform som

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

där matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Det som efterfrågas är de värden på parametern a för vilket systemet är ett center. Detta händer då egenvärdena till matrisen $\mathbf{A}$ är rent imaginära. Vi beräknar dessa egenvärden. Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{aligned} 0 = \det(\mathbf{A} - mI) &= \det \begin{pmatrix} a-m & 2a+1 \\ -1 & -2-m \end{pmatrix} = (a-m)(-2-m) + 2a+1 \\ &= (m-a)(m+2) + 2a+1 = m^2 + (a-2)m - 2a + 2a + 1 = m^2 + (a-2)m + 1. \end{aligned}$$

Vi ser att matrisen har rent imaginära egenvärden $m = \pm i$ om $a = 2$, vilket räcker för att lösa uppgiften.

Vi kan också räkna ut egenvärdena. Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} 0 = m^2 + (a-2)m + 1 &= m^2 + 2\frac{a-2}{2}m + \left(\frac{a-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-2}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(m + \frac{a-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-2}{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

så

$$m = -\frac{a-2}{2} \pm \sqrt{-1 + \left(\frac{a-2}{2}\right)^2}.$$

Med detta ser vi att egenvärdena är rent imaginära om och endast $a = 2$.

Ett annat sätt att avgöra om systemet är ett center är att beräkna spåret och determinanten för matrisen $\mathbf{A}$,

$$p = -\operatorname{tr} \mathbf{A} = -(a-2), \quad q = \det \mathbf{A} = a(-2) - (2a+1)(-1) = 1.$$

Enligt diagram Simmons sid 538 är systemet ett center om $p = 0$ och $q > 0$, det vill säga om och endast om $a = 2$.

Vi räknar vidare med $a = 2$. Då är $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ och vi vet att dess egenvärden är $m = \pm i$. En egenvektor $\mathbf{v}$ till egenvärdet $m = i$ uppfyller

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} - mI)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix} \mathbf{v},$$

vilket till exempel har lösningen $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix}$. Motsvarande komplexvärda lösning till systemet av differentialekvationer är

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{it} \mathbf{v} = e^{it} \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\cos t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + i \left(\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Real- och imaginärdel av denna lösning ger två linjärt oberoende reellvärda lösningar,

$$\mathbf{x}_1(t) = \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alla lösningar till systemet ges sedan av

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t)$$

för olika val av konstanter C_1, C_2 .

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar vid $x = 0$ till ekvationen

$$(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y = y(x).$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i dessa serier samt beräkna termer till och med ordning 8. Bestäm även konvergensraden för dessa lösningar.

(4 p)

Lösningsförslag. Om vi delar med koefficienten för högsta derivatan får vi ekvationen

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = y'' + \frac{2x}{x^2 + 1}y' + \frac{-2}{x^2 + 1}y = 0,$$

som har regulära koefficienter $P(x), Q(x)$ i en omgivning av $x = 0$. Punkten $x = 0$ är alltså en regulär punkt och vi gör ansatsen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Då är

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y \\ &= (x^2 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \{\text{byt till } k = n - 2 \text{ i andra serien, } k = n \text{ i övriga}\} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1) x^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= 2a_2 + 6a_3x + 2a_1x - 2a_0 - 2a_1x \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k k(k-1) + a_{k+2} (k+2)(k+1) + 2a_k k - 2a_k) x^k \\ &= 2(a_2 - a_0) + 6a_3x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} + (k^2 + k - 2)a_k) x^k \end{aligned}$$

För att vi ska få en lösning måste koefficienterna a_n alltså uppfylla

$$a_2 - a_0 = 0, \quad a_3 = 0$$

och

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k^2 + k - 2)a_k, \quad \text{för } k \geq 2.$$

Vi har $k^2 + k - 2 = (k+2)(k-1)$ och eftersom $(k+2)(k+1) \neq 0$ då $k \geq 2$ ser vi att

$$a_{k+2} = -\frac{k-1}{k+1}a_k, \quad \text{för } k \geq 2.$$

För att hitta två linjärt oberoende lösningar väljer vi två olika initialvillkor för a_0, a_1 .

- Med $a_0 = 1, a_1 = 0$ får vi

$$a_2 = a_0 = 1, \quad a_4 = -\frac{2-1}{2+1}a_2 = -\frac{1}{3},$$

$$a_6 = -\frac{4-1}{4+1}a_4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}, \quad a_8 = -\frac{6-1}{6+1}a_6 = -\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{7}, \quad \dots$$

Termerna med udda n uppfyller

$$a_1 = a_3 = 0$$

och därefter är alla $a_{2k+1} = 0, k \geq 2$. Motsvarande lösning $y_0(x)$ uppfyller

$$y_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 + O(x^9).$$

- Med $a_0 = 0, a_1 = 1$ får vi

$$a_2 = a_0 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Därefter är alla koefficienter $a_k = 0, k \geq 4$. Motsvarande lösning $y_1(x)$ är alltså

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x.$$

Vi ska nu avgöra konvergensraden för dessa två lösningar. Serien för $y_1(x)$ består bara av en term och konvergerar alltså för alltså för alla x . Konvergensraden är ∞ . Eftersom serien för $y_0(x)$ bara innehåller jämna termer skriver vi

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}.$$

För att beräkna konvergensraden använder vi kvottestet (Simmons sid 200-201) och beräknar

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2(k+1)} x^{2(k+1)}}{a_{2k} x^{2k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} \right| x^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{-\frac{2k-1}{2k+1} a_{2k}}{a_{2k}} \right| x^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k-1}{2k+1} x^2 = x^2.$$

Kvottestet säger att serien konvergerar om $L < 1$, det vill säga om $x^2 < 1$, eller om $-1 < x < 1$. Konvergensraden för lösningen $y_0(x)$ är alltså 1.

□

5. Följande autonoma system för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har båda en kritisk punkt i origo. Använd linjärisering eller metoden med Lyapunovfunktion för att visa att denna kritiska punkt är asymptotiskt stabil.

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -x^3 + 3xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3 \end{cases}, \quad (b) \quad \begin{cases} x' = -8x - 2y + x \sin y \\ y' = -y - 2x - 3xy^2 \end{cases}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. (a) För detta system är linjäriseringen i origo lika med noll, så den kan inte ge någon information om lösningarna till systemet. Vi använder istället metoden med Lyapunovfunktion. Vi testar med en Lyapunovfunktion på formen

$$E(x, y) = Ax^2 + By^2$$

där $A, B > 0$. Med detta antagande är $E(x, y)$ alltid en positivt definit funktion. Vi måste välja A, B så att $E(x, y)$ är strikt avtagande längs lösningskurvor till systemet som startar nära $(0, 0)$. För en sådan lösningskurva beräknar vi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) &= \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2Ax(-x^3 + 3xy^2) + 2By(-2x^2y - y^3) \\ &= -2Ax^4 + (6A - 4B)x^2y^2 - 2By^4. \end{aligned}$$

Eftersom $A, B > 0$ så är första och tredje termen ickepositiva. Om vi väljer $A = 2$ och $B = 3$ så är $6A - 4B = 0$, och den andra termen försvinner. Funktionen

$$E(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

är alltså positivt definit i origo (den punkten är ett lokalt min), och

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -4x^4 - 6y^4 < 0$$

i alla punkter utom i origo. Vi drar slutsatsen att $(0, 0)$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt (se Simmons Thm A sid 543).

(b) Systemet

$$\begin{cases} x' = F(x, y) = -8x - 2y + x \sin y \\ y' = G(x, y) = -y - 2x - 3xy^2 \end{cases}$$

har en enkel kritisk punkt i origo. Linjärisering i origo ger motsvarande linjära system

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)y = -8x - 2y \\ y' = \frac{\partial G}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial G}{\partial y}(0, 0)y = -2x - y \end{cases}.$$

Eigenvärdena för detta linjära system ges av

$$0 = \det \begin{pmatrix} -8-m & -2 \\ -2 & -1-m \end{pmatrix} = (m+8)(m+1) - 4 = m^2 + 9m + 4$$

och de är

$$m_1 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65}, \quad m_2 = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65}.$$

Eftersom $\sqrt{65} < 9$ så är båda dessa eigenvärden negativa, och det linjära systemet beskriver en stabil nod. Enligt sats om linjärisering (Simmons Thm A sid 549) har det ursprungliga autonoma systemet en asymptotiskt stabil kritisk punkt. $\square$

6. Denna uppgift gäller existens och entydighet för lösningar $y = y(x)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

där $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion definierad på något område R i xy -planet som innehåller punkten (x_0, y_0) .

- (a) Ge ett exempel på ett initialvärdesproblem som (1) med två olika funktioner som lösningar. Ge en noggrann förklaring varför de funktioner du anger är lösningar.
- (b) Formulera Picards sats som garanterar att problemet (1) har en unik lösning. Var noggrann när du anger villkoren i satsen.
- (c) Beviset av Picards sats använder sig av ett iterationsförfarande för att konstruera en följd av $y = y_n(x)$ av approximativa lösningar, där $y_0(x)$ är konstant. Förklara hur detta går till samt beräkna $y_3(x)$ för systemet (1) då $f(x, y) = x + y$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Funktionen $f = f(y) = y^{1/3}$ är definierad för alla y som det unika tal f som uppfyller $f^3 = y$. Funktionen $f(y)$ är kontinuerlig överallt. Med $f(x, y) = y^{1/3}$ har vi differentialekvationen

$$y' = y^{1/3}.$$

Det är uppenbart att den konstanta funktionen $y = 0$ uppfyller denna ekvation med initialvillkoret $y(0) = 0$. Det är heller inte komplicerat att visa att funktionen

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } x < x_0 \\ \left(\frac{2}{3}(x - x_0)\right)^{3/2}, & \text{om } x_0 \leq x \end{cases}$$

för $x_0 > 0$ är deriverbar, samt uppfyller samma differentialekvation med samma initialvillkor.

(b) Se Simmons Thm A sid 626.

(c) Se Simmons avsnitt 69, sid sid 621-625.

□