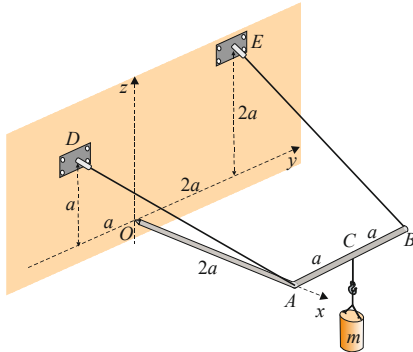


Tentamen Problem (TEN 2) i SG1112 Mekanik I

Varje uppgift ger högst 6 poäng. Skrivtid: 5 h

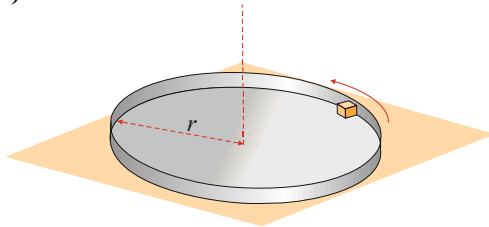
OBS! Uppgifterna 1- 4 skall inlämnas på **separata** papper. **Inga hjälpmedel** förutom papper, penna, linjaler, passare.

1)



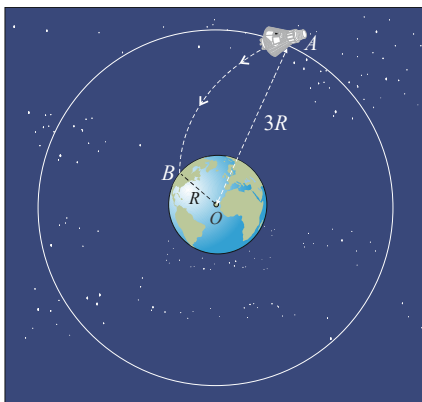
Betrakta två lätta rör OA och AB med längden $2a$ vardera. Rören är sammansvetsade i A så att de bildar en rät vinkel med varandra. Rören ligger i xy -planet och uppbär en vikt med massan m med hjälp av två linor, AD och BE , som är fästa i den vertikala väggen enligt figuren. Vikten är fäst i punkten C i mitten på röret AB . Änden O av röret OA är spetsig och trycker mot väggen i O utan att glida. Bestäm spännkrafterna S_1 och S_2 i linorna AD respektive BE . Använd dimensionerna givna i figuren.

2)



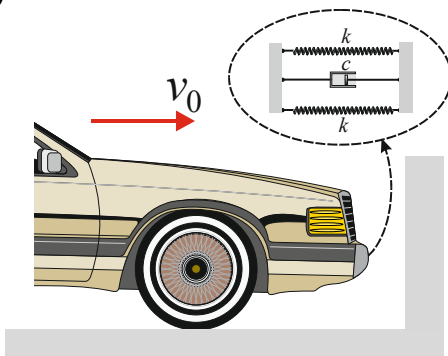
Partikeln i figuren befinner sig i en cylinderformad behållare med glatt horisontell bottenyta och en sträv cylinderformad vägg med radien r . Partikeln befinner sig intill väggen då den ges en begynnelsehastighet v_0 i tangentialriktningen. Bestäm partikelns hastighet v som funktion av rotationsvinkeln θ om friktionstalet mellan partikeln och väggen är μ .

3)



En rymdfarkost med massan m kretsar kring jorden i en cirkulär bana med radien $3R$. I punkten A ändras farkostens hastighetsriktning så att den färdas i en ny bana (från A till B) för att landa på jorden. Farkostens fart i punkten A (lika med farten vid den cirkulära banan) minskas till praktiskt taget noll vid landning genom inbromsningen i jordens atmosfär och sedan ytterligare med hjälp av fallskärmar. Bestäm det arbete U_{A-B}^{fr} som luftmotståndet utövar på farkosten under hela inbromsningen. Arbetet skall uttryckas med hjälp av farkostens massa m , tyngdaccelerationen vid jordytan g , samt jordens radie R .

4)

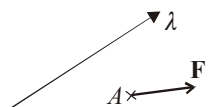


En stötfångare på en bil kan modelleras som ett system bestående av två fjädrar med fjäderkonstanten k vardera och en dämpare med dämpningskonstanten c . För att stötfångaren snabbast skall återgå till sitt jämviktsläge efter en deformation är konstanterna k och c valda så att systemet är kritiskt dämpat. Vid måttliga hastigheter kan en sådan dämpare förhindra uppkomsten av skador vid en kollision. Bestäm stötfångarens maximala hoptryckning $x_{\max}$ vid kollision med en orörlig vägg, om bilens massa är m och beloppet av bilens hastighet strax före kontakten med väggen är v_0 .

Teori (TEN 1)

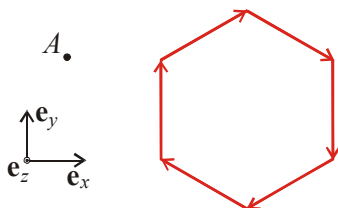
5) a. Definiera vad som menas med två ekvimomenta kraftsystem $(\mathbf{F}_1)_1, \dots, (\mathbf{F}_n)_1$ och $(\mathbf{F}_1)_2, \dots, (\mathbf{F}_m)_2$ och visa att de har lika moment med avseende på alla punkter. (2p)

b.



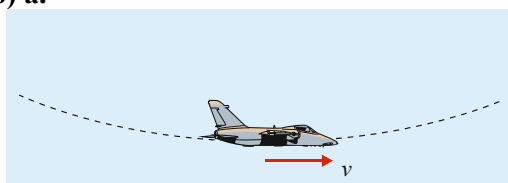
Definiera vad som menas med momentet M_λ av kraften $\mathbf{F}$ angripande i A med avseende på axeln λ samt visa att M_λ är oberoende av momentpunkten på axeln. (2p)

c.



Betrakta ett kraftsystem som bildar en symmetrisk sexhörning (hexagon) med sidan a . Varje krafts belopp är lika med P . Bestäm detta kraftsystems reduktionsresultat (kraftsumma och kraftmoment) med avseende på en punkt A som ligger i samma plan. Kan detta kraftsystem ha en enkraftsresultant? (2p)

6) a.



Betrakta ett flygplan som i det betraktade ögonblicket har farten v och totala accelerationsbeloppet $a = 3g$. Om flygplanet passerar en punkt på banan med krökningsradien ρ , bestäm dess fartändring $\dot{v}$ i detta ögonblick. (2p)

b. Rita en tydlig figur och ange uttrycket för hastigheten $\mathbf{v}$ i naturliga komponenter. Härled sedan uttrycket för accelerationen $\mathbf{a}$ med alla nödvändiga figurer och motiveringar. Derivat $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$ måste härledas. (2p)

c. Formulera och härled lagen om den kinetiska energin (dvs. sambandet mellan arbetet och ändringen av den kinetiska energin) för en partikel. (2p)

7) a. Definiera vad som menas med en konservativ kraft, potentiell energi V och härled uttrycket för potentiella energin V för den *allmänna* gravitationskraften. (2p)

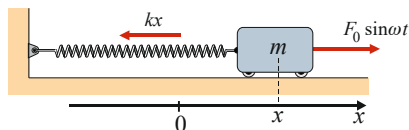
b. Definiera rörelsemängdsmomentet $\mathbf{H}_O$ för en partikel och härled momentekvationen. (2p)

c. Rita en tydlig figur och visa att sektorhastigheten $\dot{A}$ är konstant vid centralrörelse. Visa vidare uttrycket för sektorhastigheten i cylinderkoordinater. (2p)

8) a. Härled Binets formel, dvs uttrycket för radiella komponenten av partikelns acceleration vid centralrörelse. (2p)

b. Formulera svängningsekvationen och bestäm den allmänna lösningen för fallet svag dämpad svängning. (2p)

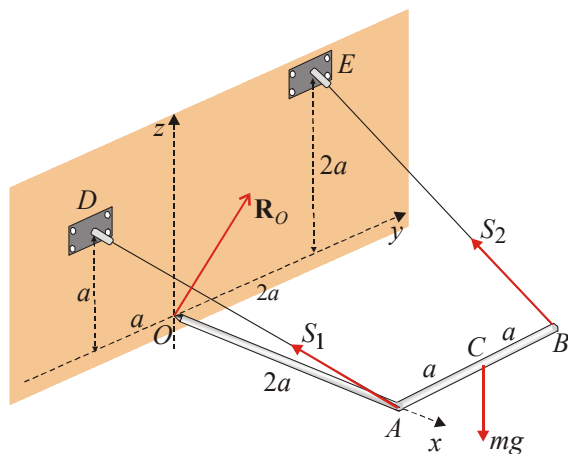
c.



Betrakta fallet påtvingad odämpad svängning. Fjäderkonstanten är k och den påtvingade kraftens amplitud $F_0 = mg$. Man observerar att partikulärlösningens amplitud $X = \frac{4}{3} \frac{mg}{k}$. Bestäm den påtvingande kraftens vinkelfrekvens ω . (2p)

Lösningar

1)



1) Bestäm spännkrafternas riktningar

$$A(2a, 0, 0), B(2a, 2a, 0), C(2a, a, 0)$$

$$D(0, -a, a), E(0, 2a, 2a)$$

$$\mathbf{e}_{AD} = \frac{(-2, -1, 1)}{\sqrt{6}}, \mathbf{e}_{BE} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$$

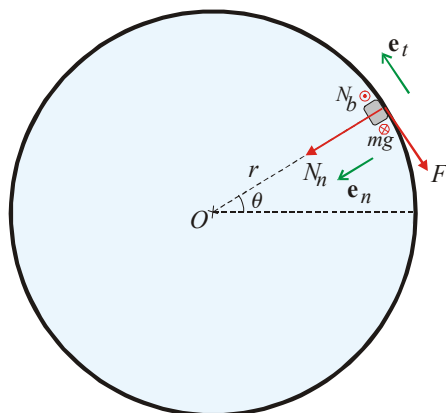
Vilket ger

$$\mathbf{S}_1 = \frac{S_1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1), \mathbf{S}_2 = \frac{S_2}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

2) Formulera momentekvationen med avs. på O, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{S}_1 + \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{S}_2 + \mathbf{r}_{OC} \times m\mathbf{g} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2a & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \frac{S_1}{\sqrt{6}} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2a & 2a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{S_2}{\sqrt{2}} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} mg = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \mathbf{e}_x: 0 + \frac{2aS_2}{\sqrt{2}} - mga = 0 \Rightarrow S_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{e}_z: -\frac{2aS_1}{\sqrt{6}} + \frac{2aS_2}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S_1 = \sqrt{3}S_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}mg \end{cases} \end{aligned}$$

2)



1) Formulera kraftekvationens komponenter i naturliga koordinater

$$\mathbf{e}_t: m\dot{v} = -F \quad (1)$$

$$\mathbf{e}_n: m \frac{v^2}{r} = N_n \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_b: 0 = N_b - mg \quad (3)$$

2) Friktionsvillkoret vid glidning mot cylinderväggen ger

$$F = \mu N_n \quad (4)$$

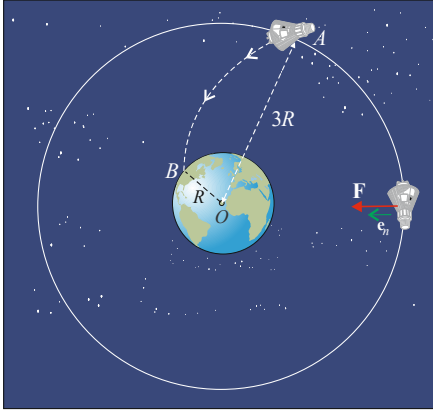
3) Ekvationerna (1) – (4) resulterar tillsammans i

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = -\mu \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{r} \underbrace{ds}_{rd\theta} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\mu d\theta \quad (5)$$

4) Integrera (5)

$$\ln v = -\mu\theta + c_1, \quad \text{B.V.} \begin{cases} \theta = 0 \\ v = v_0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \ln v_0 \Rightarrow \underline{\underline{v = v_0 e^{-\mu\theta}}}$$

3)



1) Bestäm satellitens fart i den cirkulära banan

$$\mathbf{e}_n : m \frac{v^2}{3R} = G \frac{mM}{(3R)^2} \Rightarrow v_A = v = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \sqrt{\frac{gR}{3}} \quad (1)$$

2) Använd lagen om den kinetiska energin

$$U_{A-B} = T_B - T_A = 0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{1}{6}mgR \quad (2)$$

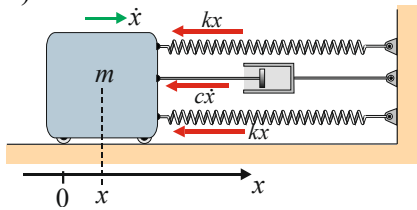
3) Dela upp arbetet i gravitationskraftens arbete och friktionsarbetet. Med $V^{gr} = -mg \frac{R^2}{r}$ fås

$$U_{A-B} = U_{A-B}^{gr} + U_{A-B}^{fr} = V_A^{gr} - V_B^{gr} + U_{A-B}^{fr} = -\frac{1}{3}mgR + mgR + U_{A-B}^{fr} = \frac{2}{3}mgR + U_{A-B}^{fr} \quad (3)$$

4) Ekvationerna (1), (2) och (3) ger tillsammans

$$U_{A-B}^{fr} = -\frac{1}{6}mgR - \frac{2}{3}mgR = -\frac{5}{6}mgR$$

4)



1) Formulera kraftekvationen för bilen efter kontakten med väggen

$$\mathbf{e}_x : m\ddot{x} = -2kx - c\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\zeta\omega_n} \dot{x} + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{\omega_n^2} x = 0$$

med den karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Villkoret för kritisk dämpning är $\zeta = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\zeta\omega_n$, vilket ger lösningen enligt

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

där integrationskonstanterna bestäms med hjälp av begynnelsevillkoren

$$\text{B.V.} \begin{cases} t=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A=0 \Rightarrow x(t) = Bte^{-\omega_n t} \Rightarrow \dot{x}(t) = Be^{-\omega_n t} - B\omega_n te^{-\omega_n t}$$

$$\text{B.V.} \begin{cases} t=0 \\ \dot{x}=v_0 \end{cases} \Rightarrow B=v_0 \Rightarrow x(t) = v_0 te^{-\omega_n t}$$

3) Bestäm rekyllängden eller $x_{\max}$. Vi har

$$\dot{x}(t) = Be^{-\omega_n t} - B\omega_n te^{-\omega_n t} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega_n}$$

och

$$x_{\max} = x(t_1) = v_0 t_1 e^{-\omega_n t_1} = \frac{v_0}{e\omega_n} = \frac{v_0}{e} \sqrt{\frac{m}{2k}}$$