

Lösningar till Problemtentamen, SG1113, 19/12, 2023

1.

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{AD} = v_1 \mathbf{e}_x + \omega_1 \mathbf{e}_z \times \frac{l}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) = \left(v_1 - \frac{l\omega_1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_x + \frac{l\omega_1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{BD} = v_2 \mathbf{e}_x + \omega_2 \mathbf{e}_z \times \frac{l}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) = \left(v_2 + \frac{l\omega_2}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_x + \frac{l\omega_2}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y$$

Genom att sätta de två uttrycken lika, komponentvis, får vi

$$v_1 - \frac{l\omega_1}{\sqrt{2}} = v_2 + \frac{l\omega_2}{\sqrt{2}}$$

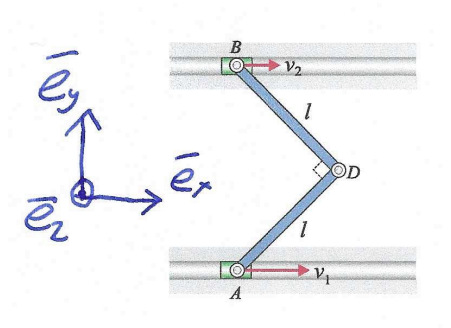
$$\frac{l\omega_1}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega_2}{\sqrt{2}}$$

med lösning

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{2}l} \quad (1)$$

och lösningen för $\mathbf{v}_D$ blir

$$\mathbf{v}_D = \frac{v_1 + v_2}{2} \mathbf{e}_x + \frac{v_1 - v_2}{2} \mathbf{e}_y \quad (2)$$



2. Newtons andra lag i x- och y-led ger

$$ma = mg \sin \alpha - F \quad (3)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha \quad (4)$$

Momentekvationen med avseende på masscentrum ger

$$I_g \ddot{\theta} = FR \Rightarrow \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} = FR \quad (5)$$

där R är hjulets radie. För rullning utan glidning gäller det kinematiska sambandet $R\ddot{\theta} = a$. Alltså kan momentekvationen skrivas

$$ma = 2F \quad (6)$$

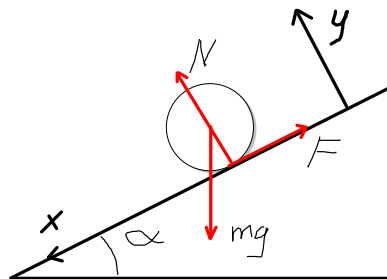
Vi får nu

$$F = \frac{1}{3} mg \sin \alpha \quad (7)$$

$$N = mg \cos \alpha \quad (8)$$

Slutligen fås

$$\mu \geq \frac{F}{N} = \frac{1}{3} \tan \alpha \quad (9)$$



3. Systemets totala kinetiska energi kan skrivas

$$T = T^h + T^s = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_A^h \omega^2 + \frac{1}{2} I_O^s \dot{\theta}^2 =$$

$$\frac{3}{4} m v_G^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 = \frac{11}{12} m \dot{\theta}^2 \quad (10)$$

där ^h refererar till hjulet och ^s till stången. Här har vi utnyttjat att $I_A^h = m r^2 / 2$, $I_O^s = m l^2 / 3$, $r \omega = v_G$ och $v_G = l \dot{\theta}$. Systemets potentiella energi kan skrivas

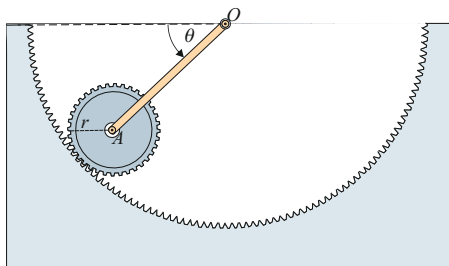
$$V = -m g l \sin \theta - \frac{1}{2} m g l \sin \theta = -\frac{3}{2} m g l \sin \theta \quad (11)$$

Begynnelsevillkoret ger att $T + V = 0$. Alltså får vi

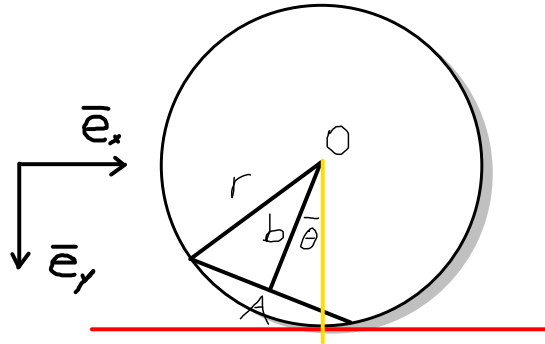
$$\frac{11}{12} m l^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{2} m g l \sin \theta \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{18 g}{11 l}} \sin \theta \quad (12)$$

Derivering ger

$$\frac{11}{6} l \dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{3}{2} g \cos \theta \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{9}{11} \frac{g}{l} \cos \theta \quad (13)$$



4. Systemet har endast en frihetsgrad och beskrivs lämpligen med den generaliserade koordinaten θ .



Figuren ger

$$x_O = r\theta \quad (14)$$

$$x_A = x_O - b \sin \theta = r\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}r \sin \theta \quad (15)$$

$$y_A = b \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}r \cos \theta \quad (16)$$

Systemets totala energi kan nu skriva

$$\begin{aligned} T = T^h + T^s &= \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} I_O^h \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2} I_A^s \dot{\theta}^2 = \\ &= m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{3}{8} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} m r^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 = \\ &= \left(\frac{23}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) m r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Systemets potentiella energi kan skrivas

$$V = -m g y_A = -\frac{\sqrt{3}}{2} m g r \cos \theta. \quad (18)$$

Lagrangianen är följaktligen

$$L = \left(\frac{23}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} m g r \cos \theta \quad (19)$$

Lagrange ekvation kan skrivas

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{23}{6} - \sqrt{3} \cos \theta \right) r \ddot{\theta} + \frac{\sqrt{3}}{2} g \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta r \dot{\theta}^2 = 0 \quad (20)$$

Den linjäriserade ekvationen som beskriver små svängningar fås genom att sätta $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$ och stryka den icke linjära termen. Ekvationen kan skrivas

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (21)$$

där

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{23 - 6\sqrt{3}} \frac{g}{l}} \quad (22)$$

Perioden ges av

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{23 - 6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \frac{l}{g}} \quad (23)$$