

Tentamen i Hållfasthetslära grundkurs med energimetoder (SE1055), 28 maj, 2020

Resultat finns på Mina Sidor senast den 26 juni, 2020.

Hjälpmedel: Formelsamling i hållfasthetslära, matematisk handbok och räknedosa.

Examinator: Peter Gudmundson, 076 213 2254

OBS! Skriv endast på en sida av bladen.

Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad.

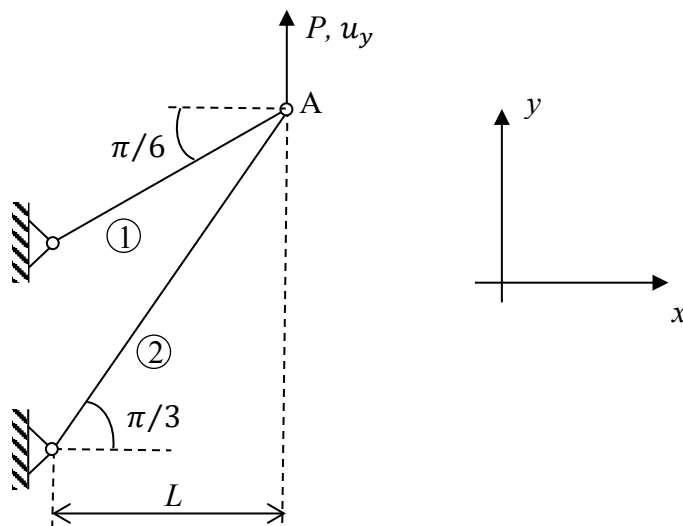
Rita gärna figurer i färg men ej med rödpenna.

Exakt metod ska användas för lösning om inte annat anges i uppgiften

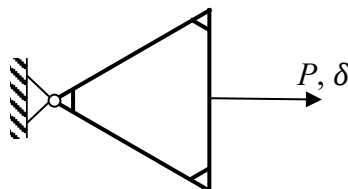
Betygsgränser: F: 0 - 11; FX: 12 - 13; E: 14 - 17; D: 18 - 21; C: 22 - 24; B: 25 - 28;

A: 29 - 40. FX = möjlig komplettering till E. Maximum 4 bonuspoäng.

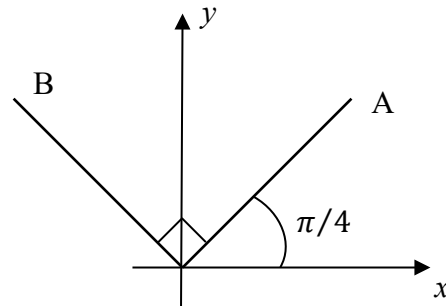
1. Stängerna 1 och 2 belastas vid punkten A med en kraft P i vertikal riktning, se figur. Beräkna förskjutningen u_y av punkten A i kraftens riktning. Styvheten för de båda stängerna ges av EA . (6p)



2. Bestäm förskjutningen δ av lastangreppspunkten för kraften P . De tre balkarna har alla längden L och böjstyvheten EI . Balkarna är sammansvetsade så att vinkeln $\pi/3$ mellan balkarna behålls under deformation. (Balkarnas längdförändringar kan försummas.) (6p)



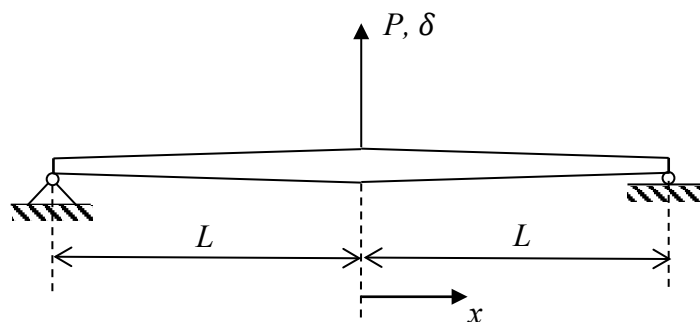
3. På en tunn plåt har normaltöjningarna i riktningarna A och B enligt figur mätts upp till $\varepsilon_A = 0,002$ och $\varepsilon_B = 0,001$. Man vet att plåten belastas med spänningarna σ_x och τ_{xy} . Övriga spänningskomponenter är noll. Materialet i plåten är linjärt elastiskt med E-modulen $E = 210 \text{ GPa}$ och Poissons tal $\nu = 0,3$. Beräkna effektivspänningen enligt von Mises hypotes. (6p)



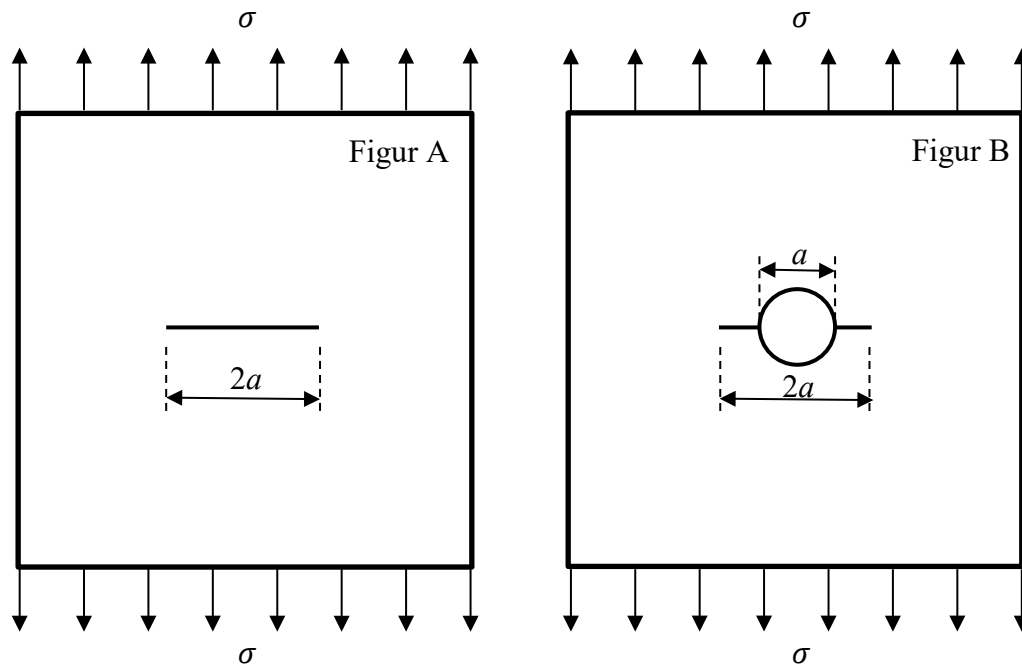
4. Använd principen om den potentiella energins minimum för att bestämma ett approximativt värde på utböjningen δ vid angreppspunkten för kraften P . Balken har ett homogent cirkulärt tvärsnitt med en radie $a(x)$ som varierar med koordinaten x enligt:

$$a(x) = a_0 \left(1 - \frac{|x|}{2L} \right)$$

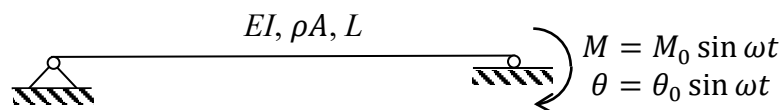
Givna storheter är tvärsnittsradien a_0 i mitten på balken, längden L , kraften P och böjstyvheten EI , se figur nedan. Kraften angriper i mitten på balken. Balken är fritt upplagd i båda ändar. Radien a_0 är mycket mindre än L . (6p)

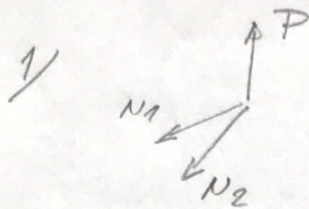


5. En spricka med längden $2a$ har upptäckts i en stor plåt. Plåten ska dimensioneras för en normalspänning σ på stort avstånd från sprickan i en riktning vinkelrät mot sprickan, se figur A. Man är oroad för att plåten ska spricka. En ingenjör föreslår att ett cirkulärt hål med diametern a ska borraras i mitten av sprickan för att därigenom minska spricklängden och förhoppningsvis risken för brott, se figur B. Analysera om ide'n med ett hål är bra. Motivera ditt svar med kvantitativa beräkningar. Det antages att villkoren för linjär brottmekanik är uppfyllda. (6p)



6. En balk med längden L , böjstyvheten EI och massan per längdenhet ρA är fritt upplagd i båda ändar. Ett tidsberoende vridande moment $M = M_0 \sin \omega t$ angriper i den högra änden, se figur. Beräkna den lägsta vinkelfrekvens ω för vilken vinkeln θ (rotationen) vid momentets angreppspunkt är noll (antiresonans). (6p)





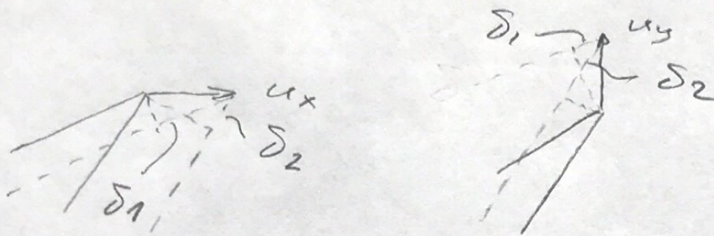
$$\uparrow: \int P - \frac{1}{2} N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 = 0$$

$$\rightarrow: \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} N_1 - \frac{1}{2} N_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_1 = -P; N_2 = \sqrt{3} P$$

$$L_1 = \frac{2L}{\sqrt{3}}; L_2 = 2L$$

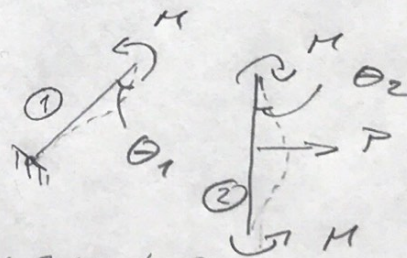
$$\delta_1 = L_1 \frac{N_1}{EA} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{PL}{EA}; \delta_2 = L_2 \frac{N_2}{EA} = 2\sqrt{3} \frac{PL}{EA}$$



$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} u_x + \frac{1}{2} u_y \\ \delta_2 = \frac{1}{2} u_x + \frac{\sqrt{3}}{2} u_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y = \sqrt{3} \delta_2 - \delta_1 =$$

$$= \frac{PL}{EA} \left(6 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$



$$FS \text{ Tab 31.3.3} \Rightarrow \Rightarrow \theta_1 = \frac{ML}{4EI}$$

$$FS \text{ Tab 31.2, Fall 1.5} \Rightarrow \Rightarrow \theta_2 = \frac{PL^2}{6EI} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{3}{2} - \frac{ML}{2EI}$$

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow M = \frac{PL}{12} PL$$

$$FS \text{ Tab 31.2} \Rightarrow \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{3EI} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{ML^2}{2EI} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{PL^3}{EI} \left[\frac{1}{48} - \frac{1}{96} \right] = \frac{PL^3}{96EI}$$

$$3/ \quad FS \ 3.1 \ (3.4) \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

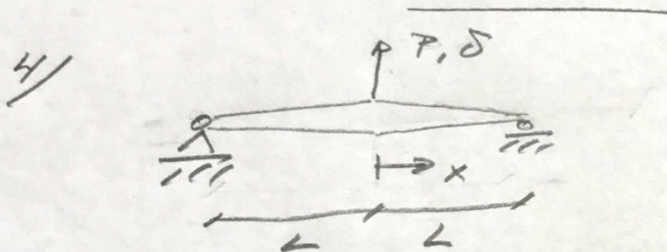
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$FS \ 2.21 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_A = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_B = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{E}{1-\nu} (\varepsilon_A + \varepsilon_B) = 900 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) = 80,8 \text{ MPa}$$

$$FS \ 3.30 \Rightarrow \sigma_e = [\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2]^{1/2} = \underline{\underline{911 \text{ MPa}}}$$



$$FS \ 6.52, \ 19.1 \Rightarrow \bar{U}(w) = \int_{-L}^L \frac{1}{2} EI (w'')^2 dx - P w(0)$$

$$FS \ \text{Tab 30.1, 3} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4} a^4 = \frac{\pi}{4} a_0^4 \left(1 - \frac{|x|}{2L}\right)^4$$

$$\text{Ansatz: } w(x) = A(L^2 - x^2); \quad w'' = -2A$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \int_0^L E \frac{\pi}{4} a_0^4 \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^4 4A^2 dx - P A L^2$$

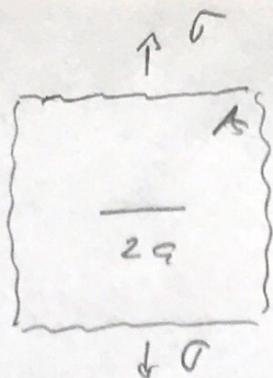
$$\int_0^L \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^4 dx = \left[-\frac{2L}{5} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^5\right]_0^L = \frac{31}{80} L$$

$$\Rightarrow \bar{U} = E a_0^4 \pi \frac{31}{80} L A^2 - P L^2 A$$

$$\frac{d\bar{U}}{dA} = 0 \Rightarrow A = \frac{40}{31\pi} \frac{PL}{E a_0^4}$$

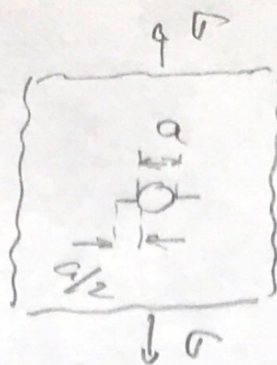
$$w(0) = A L^2 = \underline{\underline{\frac{40}{31\pi} \frac{P L^3}{E a_0^4}}}$$

5/



FS 23.10, fall 1

$$\Rightarrow K_I^A = \sigma \sqrt{\pi a}$$

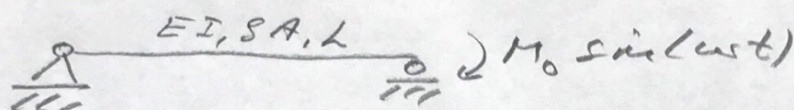


FS 23.10, fall 3

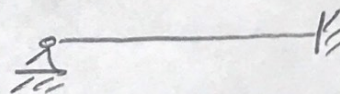
$$\begin{aligned} \Rightarrow K_I^B &= \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= K_I^A \sqrt{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.02 K_I^A \end{aligned}$$

$\Rightarrow K_I^B > K_I^A$. Det är ingen bra idé!

6/



Alt 1: Antiresonans $\Leftrightarrow$ Resonans för:



FS 11.3.5.2, fall 8

$$\Rightarrow \mu L = 3.927; \quad \omega_1 = (3.927)^2 \sqrt{\frac{EI}{8AL^4}}$$

(Feltryck i FS, $\mu L = 3.927$)

Alt 2: $w(x, t) = f(x) \sin(\omega t)$

$$FS 11.117 \Rightarrow f(x) = C_1 \sin(\mu x) + C_2 \cos(\mu x) + C_3 \sinh(\mu x) + C_4 \cosh(\mu x)$$

$$f(0) = 0; \quad M(0) = -EI f''(0) = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = 0$$

$$f(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin(\mu L) + C_3 \sinh(\mu L) = 0$$

$$M(L) = -EI f''(L) = M_0 \Rightarrow C_1 \sin(\mu L) - C_3 \sinh(\mu L) = \frac{M_0}{\mu^2 EI}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{M_0}{2 \sin(\mu L) \mu^2 EI}; \quad C_3 = \frac{-M_0}{2 \sinh(\mu L) \mu^2 EI}$$

$$\Rightarrow w'(L) = \frac{M_0}{2EI\mu} [\cot(\mu L) - \coth(\mu L)] = 0$$

$$\Rightarrow \mu L = 3.927, \dots$$