

TENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 Vektoranalys, HT2021

Onsdagen den 22 december 2021, kl 8.00 – 13.00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut (ingen räknedosa).

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från HT2021 adderas till tentauppgift 1, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan.

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng.

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (i) (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn, (ii) (ρ, φ, z) är cylinderkoordinater så att $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$, (iii) (r, θ, φ) är sfäriska koordinater så att $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$.

1. (a) Bestäm konstanten $n > 0$ så att vektorfältet $\mathbf{B} = r^{-n}\mathbf{e}_r$ har ett vektorpotential!
(OBS att notationen förklaras i början av tentamen.) (2p)
(b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{B}$ du bestämde i (a) ur klotet $r = R$ ($R > 0$ är en given konstant). (2b)
(c) Visa att vektorfältet $\mathbf{B}$ du bestämde i (a) har ett skalärpotential Φ . Bestäm Φ så att $\Phi \rightarrow 0$ om $r \rightarrow \infty$. (2p)
2. (a) Förenkla följande uttryck så långt som möjligt med hjälp av indexräkning och skriv resultatet på vektorform (om möjligt):
 - (i) $\operatorname{div}(\mathbf{r} \times \mathbf{A})$
 - (ii) $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{r}$där $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ är Ortsvektorn i kartesiska koordinater i $\mathbb{R}^3$ och $\mathbf{A}$ är ett deriverbart vektorfält i $\mathbb{R}^3$. (2+2p)
(b) Låt u och v vara skalärfält i $\mathbb{R}^3$ som kan deriveras två gånger.
Visa att $u\Delta v - v\Delta u = \nabla \cdot \mathbf{A}$ där $\mathbf{A}$ är ett vektorfält som du skall bestämma. (2p)
3. (a) Bestäm konstanten $n < 0$ så att integralen vektorfältet $\mathbf{A} = B(\rho/B)^n \mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z$ (i cylinderkoordinater) har samma cirkulationen $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ för alla slutna linjar L som omslutar z -axeln en gång moturs (som t.ex. en cirkel med godtycklig radie $R > 0$); B är en konstant. Beräkna denna cirkulation! (3p)
(b) Låt $u = r^2 \cos(k\theta)$ (i sfäriska koordinater) där $k > 0$ är en konstant. (i) Beräkna Δu . (ii) Visa att, om $k = 2$, så är $\Delta u = c$ med c en konstant som du skall bestämma. *Ledning:* $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. (3p)

4. Ett koordinatsystem (u, v, w) i $\mathbb{R}^3$ definieras genom

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv \cos(w), \quad z = uv \sin(w) \quad (uv > 0, 0 \leq w \leq 2\pi).$$

(a) Visa att koordinaterna (u, v, w) är ortogonala! (1p)

(b) Ett vektorfält $\mathbf{A}$ ges i koordinaterna (u, v, w) : $\mathbf{A} = uv\mathbf{e}_w$. (i) Beräkna $\text{rot}(\mathbf{A})$!

(ii) Transformerar $\text{rot}(\mathbf{A})$ till kartesiska koordinater. (3p)

(c) Ett skalärfält Φ ges i koordinaterna (u, v, w) : $\Phi = u^2 + v^2$. Beräkna $\Delta\Phi$. (2p)

5. (a) Beräkna det elektriska fältet $\mathbf{E}$ i hela rummet $\mathbb{R}^3$ som genereras av laddningstätheten

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(r/a) & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (1)$$

där $\rho_0 > 0$ och $a > 0$ är konstanter.

Ledning: Elektriska fältet uppfyller $\text{div}(\mathbf{E}) = \rho$, $\text{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$ och är kontinuerligt; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Gör ansatsen $\mathbf{E} = f(r)\mathbf{e}_r$.

(b) Beräkna det magnetiska fältet $\mathbf{B}$ i hela rummet som genereras av elektriska strömtätheten

$$\mathbf{j} = \begin{cases} j_0(\rho/a)\mathbf{e}_z & 0 < \rho < a \\ \mathbf{0} & \rho > a \end{cases}$$

där $j_0 > 0$ och $a > 0$ är konstanter.

Ledning: Magnetiska fältet uppfyller $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$, $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mathbf{j}$ och är kontinuerligt; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Gör ansatsen $\mathbf{B} = g(\rho)\mathbf{e}_\varphi$. (6p)

6. Formulera ett matematisk modell för densiteten $n(\mathbf{r}, t)$ av bakterier i ett cylinder $0 \leq \rho \leq 2R$, $0 \leq z \leq R$, där $R > 0$ är en konstant, enligt följande beskrivning. Om det behövs, inför själv matematiska symboler och förklara vad dem betyder (ρ, φ, z är cylinderkoordinater i $\mathbb{R}^3$).

(i) Strömtätheten $\mathbf{j}$ av bakterierna är alltid i riktningen där bakteriedensiteten minskar mest, och dess belopp är proportionellt mot denna maximala minstingen.

(ii) Ändringen av antalet av bakterier inom en godtycklig volymen V av cylindern, $\frac{d}{dt} \int_V n dV$, är en summa av två termer: första termen är flödet av bakterierströmmen $\mathbf{j}$ ur V , och andra termen är proportionellt mot antalen av bakterierna inom V . (iii) Inga bakterier kan strömma in eller ur cylinderns rand. (iv) Vid tiden $t = 0$ finns där ett antal bakterier N_0 jämnt fördelad inom området $0 \leq \rho \leq R/2$, $0 \leq z \leq R$.

Beräkna tidberoendet av totala antalet N av bakterier inom cylindern för alla tider $t > 0$. *Ledning:* N uppfyller en enkel ordinär differentialekvation som man kan bestämma från informationen ovan. (6p)

LYCKA TILL!

Lösningföreläsning tentamen SI1147, 22 december 2021

NOTE: I typed this in quickly and did not check: this will probably be corrected!!!!

This is a suggested solution of an exam and not pedagogical material: I skip some details and only write $(\dots)$; if you don't understand $(\dots)$, look at the course book for explanations.

1. (a)

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_r \underbrace{(r^2 \sin(\theta) r^{-n})}_{r^{2-n} \sin(\theta)} = (2-n)r^{1-n} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{n=2}.$$

(b)

$$\oint_{r=R} r^{-2} \mathbf{e}_r d\mathbf{S} = (\dots) = 4\pi$$

oberoende av R (OBS att fältet är singulär i $r=0$ och Gauss sats kan inte användas direkt.)

(c) Ansatsen $\Phi = f(r)$ ger

$$\nabla \Phi = f'(r) \mathbf{e}_r \stackrel{!}{=} r^{-2} \mathbf{e}_r \Rightarrow f'(r) = r^{-2} \Rightarrow f(r) = c - r^{-1}$$

där c är en integrationskonstant. Villkoret $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0$ ger $c = 0$. Svar:

$$\boxed{\Phi = -1/r}.$$

2. (a) (i)

$$\operatorname{div}(\mathbf{r} \times \mathbf{A}) = \partial_i \epsilon_{ijk} x_j A_k = \underbrace{\epsilon_{ijk} \delta_{ij}}_{\epsilon_{iik}=0} A_k + \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{=-\epsilon_{jik}} x_j \partial_i A_k = -x_j [\nabla \times \mathbf{A}]_j = \boxed{-\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{A})}.$$

(ii)

$$[(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{r}]_i = \epsilon_{ijk} [\mathbf{A} \times \nabla]_j x_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} A_l \underbrace{\partial_m x_k}_{\delta_{mk}} = \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{jlk}}_{-\epsilon_{ijk} \epsilon_{lik} = -2\delta_{il}} A_l = -2A_i.$$

$$\text{Svar: } \boxed{(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{A}}.$$

(b) (Uppgiften är standard; resultatet är känd som Greens formel.)

$$u\Delta v - v\Delta u = \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) \Rightarrow \boxed{\mathbf{A} = u\nabla v - v\nabla u}.$$

3. (a) Det kan bara vara sant om $\operatorname{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ om $\rho > 0$:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}) = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & B^{1-n} \rho^{n+1} & z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z (n+1) B^{1-n} \rho^{n-1} = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{n=-1}.$$

Vi beäknar cirkulationen för en cirkel med radie R : $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L B^{2\frac{1}{\rho}} \mathbf{e}_\varphi \cdot d\mathbf{r} = (\dots) = 2\pi B^2$.

(b) (i)

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta u) \\ &= \underbrace{\partial_r^2 u}_{2 \cos(k\theta)} + \frac{2}{r} \underbrace{\partial_r u}_{2r \cos(k\theta)} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\partial_\theta^2 u}_{-k^2 r^2 \cos(k\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \underbrace{\partial_\theta u}_{-kr^2 \sin(k\theta)} \\ &= \boxed{(6 - k^2) \cos(k\theta) - k \cos(\theta) \sin(k\theta) / \sin(\theta)}.\end{aligned}$$

(ii) Om $k = 2$:

$$\Delta u = (6 - 2^2) \cos(2\theta) - 2 \cos(\theta) \sin(2\theta) / \sin(\theta) = \underbrace{2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - 4 \cos^2(\theta)}_{-2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = -2$$

pga. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Svar: $\boxed{c = -2}$.

Alternativlösning: $r^2 \cos(2\theta) = r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta) = z^2 - x^2 - y^2$ ger $\Delta(z^2 - x^2 - y^2) = 2 - 2 - 2 = -2$.

4. (a)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u^2 - v^2)/2 \\ uv \cos(w) \\ uv \sin(w) \end{pmatrix}$$

ger

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} u \\ v \cos(w) \\ v \sin(w) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -v \\ u \cos(w) \\ u \sin(w) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -uv \sin(w) \\ uv \cos(w) \end{pmatrix},$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\dots) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = (\dots) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = (\dots) = 0.$$

Detta visar att (u, v, w) är ett ortogonalt koordinatsystem.

Från det (jag beräknar det det pga att det behövs i (b) och (c)): skalfaktorer

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_w = uv;$$

enhetsvektorer

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_u &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} u \\ v \cos(w) \\ v \sin(w) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} -v \\ u \cos(w) \\ u \sin(w) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_w &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(w) \\ \cos(w) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) (i)

$$\begin{aligned}\boxed{\text{rot}(\mathbf{A})} &= \frac{1}{uv(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_u & \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_v & uv \mathbf{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ 0 & 0 & (uv)^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{uv(u^2 + v^2)} \left(\sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_u \underbrace{\partial_v(u^2 v^2)}_{2u^2 v} - \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_v \underbrace{\partial_u(u^2 v^2)}_{2uv^2} \right) \\ &= \boxed{\frac{2u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathbf{e}_u - \frac{2v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathbf{e}_v}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\boxed{\text{rot}(\mathbf{A})} &= \frac{2u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathbf{e}_u - \frac{2v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathbf{e}_v = \frac{2u}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u \\ v \cos(w) \\ v \sin(w) \end{pmatrix} - \frac{2v}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} -v \\ u \cos(w) \\ u \sin(w) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{2\mathbf{e}_z}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\text{grad } \Phi &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathbf{e}_u \partial_u((u^2 + v^2)) + \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathbf{e}_v \partial_v((u^2 + v^2)) = \frac{2u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathbf{e}_u + \frac{2v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathbf{e}_v. \\ \boxed{\Delta \Phi} &= \text{div grad } \Phi = \frac{1}{uv(u^2 + v^2)} \left(\partial_u \underbrace{(\sqrt{u^2 + v^2} uv \cdot 2u/\sqrt{u^2 + v^2})}_{2u^2 v} \right. \\ &\quad \left. + \partial_v \underbrace{(uv \sqrt{u^2 + v^2} \cdot 2v/\sqrt{u^2 + v^2})}_{2v^2 u} \right) = \frac{8uv}{uv(u^2 + v^2)} = \boxed{\frac{8}{u^2 + v^2}}.\end{aligned}$$

Alternativlösning: $u^2 + v^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2r$ (detta kan visas genom att beräkna $x^2 + y^2 + z^2$), som ger

$$\Delta \Phi = \partial_r^2 \Phi + \frac{2}{r} \partial_r \Phi = \frac{2}{r} 2 = \frac{4}{r} = \frac{8}{u^2 + v^2}.$$

5. (a) Ansatsen $\mathbf{E} = f(r) \mathbf{e}_r$ ger

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_r(r^2 \sin(\theta) f(r)) = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 f(r)) = \begin{cases} \rho_0(r/a) & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

dvs.

$$\partial_r(r^2 f(r)) = \begin{cases} \rho_0 r^3/a & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \Rightarrow r^2 f(r) = \begin{cases} \rho_0 r^4/4a + c_1 & \leq r \leq a \\ c_2 & r > a \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(r) = \begin{cases} \rho_0 r^2/4a + c_1 r^{-2} & 0 \leq r \leq a \\ c_2 r^{-2} & r > a \end{cases}.$$

Funktionen $f(r)$ är kontinuerlig i $r = 0$ om $c_1 = 0$, och kontinuerlig i $r = a$ om

$$\rho_0 a^2/4a = \frac{1}{4}\rho_0 a = \frac{c_2}{a^2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}\rho_0 a^3.$$

Svar:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \rho_0(r^2/4a)\mathbf{e}_r & 0 \leq r \leq a \\ \rho_0(a^3/4r^2)\mathbf{e}_r & r > a \end{cases}.$$

Anmärkning: En fullständig lösning kräver också att man kollar $\text{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$ (det visades under kursens gång, och jag hoppar över det här).

(b) Ansatsen $\mathbf{B} = g(\rho)\mathbf{e}_\varphi$ ger

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \rho g(\rho) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho g(\rho)),$$

och $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mathbf{j}$ ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho g(\rho)) &= \begin{cases} j_0(\rho/a) & 0 < \rho < a \\ 0 & \rho > 0 \end{cases} \Rightarrow \partial_\rho(\rho g(\rho)) = \begin{cases} j_0 \rho^2/a & 0 < \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \\ \Rightarrow g(\rho) &= \begin{cases} j_0 \rho^2/3a + c_1/\rho & 0 < \rho < a \\ c_2/\rho & \rho > a \end{cases}. \end{aligned}$$

Funktionen $g(\rho)$ är kontinuerlig i $\rho = 0$ om $c_1 = 0$, och kontinuerlig i $\rho = a$ om

$$j_0 a^2/3a = \frac{1}{3}j_0 a = c_2/a \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}j_0 a^2.$$

Svar:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} j_0(\rho^2/3a)\mathbf{e}_\varphi & 0 < \rho < a \\ j_0(a^2/3\rho)\mathbf{e}_\varphi & \rho > a \end{cases}.$$

Anmärkning: En fullständig lösning kräver också att man kollar $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$ (det visades under kursens gång, och jag hoppar över det här).

6. (Jag bara ger en skiss.) (i)

$$\mathbf{j} = -D \text{grad } n$$

där $D > 0$ är en konstant som karakteriserar spridningeförmågan av bakterierna. (Detta är en variant av Fouriers lag och ofta kallas Ficks lag.)

(ii)

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V n dV}_{= \int_V n_t dV} = - \oint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} + k \int_V n dV$$

där $k > 0$ är en konstant som karakteriserar hur snabbt bakterierna förökar sig. Gauss satsen ger

$$\int_V (n_t + \operatorname{div}(\mathbf{j}) - kn) dV = 0.$$

Volymen V är godtycklig $\Rightarrow$

$$\boxed{n_t + \operatorname{div}(\mathbf{j}) = kn}.$$

(Detta är en variant av kontinuitetsekvationen med källterm.)

Med $\mathbf{j} = -D \operatorname{grad} \mathbf{n}$ får vi partiella differentialekvationen

$$\boxed{n_t - D\Delta n = kn} \quad (\text{PDE}),$$

(detta partiell differentialekvation (PDE) är en variant av diffusionsekvationen med källterm). (iii) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\partial C} = 0$ och $\mathbf{j} = -D\nabla n$ ger Neumann randvillkor (RV): Normalderivatan av n är noll vid randytan ∂C till cylindern C , dvs.,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla n|_{\partial C=0} = 0 \quad (\text{RV}).$$

där $\mathbf{n}$ är normalvektorn till randytan ∂C .

(iv)

$$n(\mathbf{r}, t=0) = \begin{cases} N_0/|V| & (0 < \rho < R/2, 0 < z < R) \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad (\text{BV}),$$

där $|V| = (R/2)^2 \pi \cdot R = \pi R^3/4$. (Detta är ett begynnelsevillkor (BV).)

$$N = \int_C n dV$$

uppfuller

$$\frac{d}{dt} N = kN$$

pga randvillkoret (flödet in eller ur cylinderns randytan är noll), och $N(0) = N_0$ (BV). Detta ger

$$N(t) = N_0 e^{kt},$$

oberoende av detaljerna.

Anmärkning: I kursen SI1200 kommer du att lära dig att beräkna $n(\mathbf{r}, t)$, och att modellen ovan (dvs., PDE, RV and BE) har en entydig lösning.