

## Lösningssförslag till Tentamen i Modern Fysik (SH1014) 09.00-14.00, 2020-01-11, KTH, Stockholm

Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

### 1. Problem:

En partikel med massan  $m = 1$  u befinner sig i en harmonisk oscillatorpotential med fjäderkonstanten  $\kappa$ . Man observerar att partikeln från sitt grundtillstånd bland annat kan absorbera ljus med våglängderna 503 nm och 754 nm och har kunnat sluta sig till att dessa övergångar måste vara bland de fyra första exciterade tillstånden.

a) Bestäm fjäderkonstanten  $\kappa$ . [2 p]

b) Härled för den tidsberoende Schrödingerekvationen vad grundtillståndets energiegenvärde blir i termer av  $m$  och  $\omega_0$ , givet att den enklaste vågfunktion som uppfyller Schrödingerekvationen är en Gaussian på formen  $\Psi(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}$ . [3 p]

### Lösning:

a) Energin för en harmonisk oscillator ges av:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

där  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ . Energiskillnaden,  $\Delta E$ , mellan två nivåer  $n_1$  och  $n_2$ , motsvarar våglängden,  $\lambda$ , för ljusfotonen:

$$\Delta E = (n_2 - n_1) \hbar \omega_0 = \frac{hc}{\lambda}.$$

Vi löser ut våglängden,  $\lambda$ , och sedan fjäderkonstanten,  $\kappa$ :

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{(n_2 - n_1)\hbar\omega_0} = \frac{2\pi c}{(n_2 - n_1)\omega_0} = \frac{2\pi c}{n_2 - n_1} \sqrt{\frac{m}{\kappa}},$$
$$\kappa = \frac{4\pi^2 m c^2}{\lambda^2 (n_2 - n_1)^2}.$$

För de två olika våglängderna i uppgiften så kan vi använda  $\Delta E = hc/\lambda$  och således har vi:

$$\Delta E_1 = [ \lambda_1 = 755 \text{ nm} ] = 1.645 \text{ [eV]}$$

$$\Delta E_2 = [ \lambda_2 = 503 \text{ nm} ] = 2.465 \text{ [eV]}$$

Vi noterar att  $\Delta E_2/\Delta E_1$  ligger nära 1.5 och inser att excitationerna går från grundtillståndet ( $n_1 = 0$ ) till  $n_2 = 2$  respektive  $n_2 = 3$ . Vi väljer övergången  $n_1 = 0 \rightarrow n_2 = 2$  och räknar ut fjäderkonstanten:

$$\kappa = \frac{4\pi^2 m c^2}{\lambda_2^2 (2 - 0)^2} = \frac{\pi^2 m c^2}{\lambda_2^2} = \frac{\pi^2 931.502 \cdot 10^6 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}{755 \cdot 10^{-9}} = 2584 \text{ [N/m]}.$$

**b)** Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x) = E\psi(x)$$

Sätt:  $\omega = \sqrt{k/m}$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x) = E\psi(x)$$

Ansätt:  $\psi(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}$  (Gaussian):

$$\begin{aligned}\frac{d\psi(x)}{dx} &= -C\frac{2x\alpha}{2}e^{-\alpha x^2/2} = -C\alpha x e^{-\alpha x^2/2} \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= C\frac{2x\alpha^2}{2}xe^{-\alpha x^2/2} - C\alpha e^{-\alpha x^2/2} = Ce^{-\alpha x^2/2} [\alpha^2 x^2 - \alpha].\end{aligned}$$

Sätt upp Schrödingerekvationen med denna vågfunktion:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}Ce^{-\alpha x^2/2}[\alpha^2 x^2 - \alpha] + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 Ce^{-\alpha x^2/2} &= ECe^{-\alpha x^2/2} \\ -\frac{\hbar^2}{2m}[\alpha^2 x^2 - \alpha] + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 &= E\end{aligned}$$

Vi identifierar termer ( $x^0$  och  $x^2$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\hbar^2\alpha}{2m} &= E \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 &= 0\end{aligned}$$

Den nedre ekvationen ger  $\alpha = m\omega/\hbar$ , som instoppat i den övre ger:  $E = \hbar\omega/2$ . Detta är grundtillståndets energiegenvärde som vi sökte. (Denna energi kan förstås uttryckas som  $E = (\hbar/2)\sqrt{\kappa/m}$  om man vill.

## 2. Problem:

En stav färdas i mycket hög fart,  $v$ , längs x-axeln, relativt en stillastående observatör. Staven har vinkeln  $\theta_0$  gentemot  $x'$ -axeln, och längden  $L_0$ , i sitt eget referenssystem.

a) Vad blir dess längd  $L$  i det stillastående referenssystemet? Förenkla så långt det går. [3 p]

b) Vad blir dess vinkel  $\theta$  i det stillastående referenssystemet? Förenkla så långt det går. [2 p]

### Lösning:

a) Vi har, i systemet  $S'$ , stavens projicerade längd för  $x'$  och  $y'$ :

$$\begin{aligned}\Delta x' &= L_0 \cos \theta_0 \\ \Delta y' &= L_0 \sin \theta_0 \\ L_0 &= \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}\end{aligned}$$

Längdkontraktion ger, för systemet  $S$ :

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\Delta x'}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \cos \theta_0 \\ \Delta y &= \Delta y' = L_0 \sin \theta_0 \\ L &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\frac{L_0^2 \cos^2 \theta_0}{\gamma^2} + L_0^2 \sin^2 \theta_0} = \\ &= L_0 \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} = L_0 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}.\end{aligned}$$

Till slut så får vi längden i  $S$ :

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0}.$$

b) För vinkeln,  $\theta$ , i  $S$ , så har vi:

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L_0 \sin \theta_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2} L_0 \cos \theta_0} = \gamma \tan \theta_0.$$

Vi får således vinkeln  $\theta$  i  $S$ :

$$\theta = \arctan(\gamma \tan \theta_0).$$

### 3. Problem:

I Bohrmodellen antar man att elektronen rör sig i Coulombpotentialen för en punktformig laddning och att rörelsemängdsmomentet för de stabila elektronbanorna är kvantiserat med  $L = n\hbar$ .

a) Härled, med klassisk fysik, ekvationen som ger radien för elektronbanorna som funktion av kvanttalet  $n$ , dvs:  $r_n = n^2 a_0$ . [2 p]

b) Använd nu den kvantmekaniska lösningsmodellen för att visa att Bohrmodellens radie, som funktion av  $n$  överensstämmer med den mest sannolika radien för just de tillstånd som har kvanttal:  $l = n - 1$ . Visa detta för fallen då  $n = 1, 2, 3$  samt att det inte stämmer för valfritt fall då  $l \neq n - 1$ . [3 p]

Utöver de vågfunktioner som finns i formelsamlingen anger vi här även den radiella delen för  $3d$ -tillstånden:

$$R_{3,2} = \frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$$

#### Lösning:

a) Klassiskt så har vi:  $L = r \times p = rp = mvr$ , och med villkoret ovan:  $mvr = n\hbar$ . Vi får alltså:

$$v = \frac{n\hbar}{mr}.$$

Vi sätter nu centripetalkraften lika med Coulombkraften:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Om vi kombinerar de två ekvationerna ovan så får vi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} &= \frac{mn^2\hbar^2}{rm^2r^2} \\ r &= n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}. \end{aligned}$$

Så vi får  $r_n = a_0 n^2$ , där  $a_0 = \hbar^2 4\pi\epsilon_0 / (me^2)$ .

b) Vi har för sannolikheten  $P$  och radien  $r$  följande samband:

$$P(r) = |rR(r)|^2$$

där  $R(r)$  är den radiella vågfunktionen.

Vi visar det eftersökta sambandet angående radien för tillstånden  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p$  och  $3d$  genom att söka efter nollpunkter i derivatan.

**1s: ( $l=n-1$ )**

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(r^2 R(r)^2)}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 e^{-2r/a_0} \right) = 2e^{-2r/a_0} (r - 1/a_0) \\ &\Rightarrow r = a_0 \Rightarrow r = n^2 a_0 \text{ (som Bohrmodellen).} \end{aligned}$$

**2s: ( $l=n-2 \neq n-1$ )**

$$0 = \frac{d}{dr} \left[ r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{2a_0} \right)^2 e^{-r/a_0} \right] = e^{-r/a_0} \left( 2r - \frac{4r^2}{a_0} + \frac{2r^3}{a_0^2} - \frac{r^4}{4a_0^2} \right).$$

Här kan man lösa ekvationen, eller sätta in antagandet  $r = 4a_0$ . Vid det senare får vi att

$$0 = 8a_0 - 4 \cdot 16a_0 + 2 \cdot 64a_0 - 64a_0 = 8a_0 \neq 0.$$

Alltså är detta ingen lösning och det är *inte* som Bohrmodellen.

**2p: (l = n-1)**

$$0 = \frac{d}{dr} \left[ r^4 e^{-r/a_0} \right] = e^{-r/a_0} (4r^3 - r^4/a_0) = r^3 e^{-r/a_0} (4 - r/a_0)$$

$$0 = 4a_0 - r$$

$$\Rightarrow r = 4a_0 \Rightarrow r = n^2 a_0 \text{ (som Bohrmodellen).}$$

**3d: (l=n-1)**

$$0 = \frac{d}{dr} \left[ r^6 e^{-2r/3a_0} \right] = e^{-2r/3a_0} (6r^5 - 2r^6/3a_0) = 2r^5 e^{-2r/3a_0} (3 - r/3a_0)$$

$$0 = 3 - \frac{r}{3a_0}$$

$$\Rightarrow r = 9a_0 \Rightarrow r = n^2 a_0 \text{ (som Bohrmodellen).}$$

Vi ser att samstämmighet till Bohrmodellens radie stämmer för 1s, 2p, 3d (som alla har  $l=n-1$ ), men inte för 2s (som har  $l=n-2$ ).

Ovanstående egenskap som alltså gäller för  $l = n - 1$  kan också lätt visas för godtyckligt  $n$ , men vi gör inte det här.

#### 4. Problem:

Man dopar ofta halvledare för att få tillgång till fria laddningsbärare. Ett sätt att dopa kisel är att använda fosfor. En fosforatom, med fem valenselektroner, omgiven av kiselgittret, kan då modelleras som en väteliknande atom för vilken den "överblivna", så kallade donatorelektronen, ser en effektiv laddning  $+e$  då resten av kärnladdningen avskärmas. Eftersom denna atom inte befinner sig i vakuum så måste man i sin formalism ersätta dielektricitetskonstanten  $\epsilon_0$  med  $\epsilon = \Omega\epsilon_0$ , där konstanten  $\Omega$  beror av det omgivande materialet. Elektronen är inte heller fri att röra sig i vanliga orbitaler utan följer en dispersionsrelation som vi sätter till  $\mathcal{E} = Ak^2$ , vilket ger den en *effektiv massa*,  $m_{\text{eff}}$ , istället för den fria elektronmassan. Givet att  $\Omega = 12$  för kisel, och  $A = 1.2 \cdot 10^{-38} \text{ J}^2\text{s}^2/\text{kg}$ , hur mycket energi kostar det att frigöra donatorelektronen från sitt grundtillstånd? [5 p]

OBS att *enheten* för  $A$  var felangiven i originalydelsen.

#### Lösning:

Energien,  $E$ , för en elektron i en vätelik atom, (med korrektionen av  $\epsilon_0$  enligt uppgiften) kan skrivas:

$$E = -\frac{m_{\text{eff}}e^4}{2(4\pi\Omega\epsilon_0)^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = \frac{-13.6 \text{ [eV]}}{\Omega^2 n^2} \frac{m_{\text{eff}}}{m_e}.$$

Här har vi satt  $Z = 1$ , dvs vi har använt insikten att elektronen bara ser laddningen  $+e$  från kärnladdningen.

Från formelsamlingen får följande uttryck för den effektiva massan:

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left( \frac{d^2\mathcal{E}}{dk^2} \right)^{-1}$$

. Med det i uppgiften givna uttrycket  $\mathcal{E} = Ak^2$ , så får vi:

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dk^2} = 2A.$$

Detta ger, för energin för grundtillståndet ( $n = 1$ ):

$$E = -\frac{-13.6 \text{ [eV]}\hbar^2}{\Omega^2 1^2 \cdot 2Am_e} = \dots = -47.7 \cdot 10^{-3} \text{ [eV]}.$$

En frigjord elektron motsvarar  $n \rightarrow \infty$ , dvs  $E = 0$ . Energien som krävs för att frigöra donatorelektronen är skillnaden mellan energin för  $n = 1$  och  $n \rightarrow \infty$ , dvs uttrycket ovan med omvänt tecken. Energien som krävs är alltså ca 48 meV.

## 5. Problem:

Kapten James T. Kirk har fått en ny gammapistol i julklapp av Mr. Spock och han är nu sugen på att testa den på sin skjutbana ombord på rymdskeppet Enterprise. Han ställer sig ca 10 meter från måltavlan och siktar. Men plötsligt så blir han lite orolig för att gammastrålningen kan spridas tillbaka mot honom medelst Comptonspridning när han skjuter gammafotoner mot måltavlan. Måltavlan består av metall.

a) Antag först att Comptonspridningen sker i endast en punkt, och att Kirk har ställt in gammaenergin på sin pistol till 511 keV. Med vilken gammaenergi kommer gammafotonerna (som sprids från måltavlan) rakt tillbaka mot Kirk? [1 p]

b) Uppmuntrad efter att ha löst problemet i a) så börjar Kirk vrida upp energin på sin gammapistol. Men han har glömt en sak: gammastrålningen kan ju spridas två gånger (med vinkeln  $\theta_1$  respektive  $\theta_2 = 180^\circ - \theta_1$ ) och sedan träffa honom ändå.

- Ta fram uttrycket (förkortat så mycket som möjligt) för energin på fotonerna som träffar Kirk efter två spridningar i måltavlan. [3 p]
- Om Kirk vrider upp gammafotonenergin till mycket höga värden, finns det en gräns för hur hög fotonenergin som sprids tillbaka (efter två spridningspunkter) kan bli? I så fall, vad är gränsfotonenergin? [1 p]

## Lösning:

För Comptonspridning så gäller följande samband:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2}.$$

Vi löser ut  $E'$  och sätter in  $\theta = \pi$  och  $E = 511$  keV:

$$E' = \frac{1}{\frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} + \frac{1}{E}} = \frac{1}{\frac{2}{511} + \frac{1}{511}} = \frac{511}{3} = 170 \text{ keV},$$

så svaret i a är alltså 170 keV. För uttrycket för två spridningar så kallar vi (som tidigare) fotonenergin från pistolen för  $E$ , fotonenergin efter 1:a spridningen för  $E'$  och fotonenergin efter 2:a spridningen  $E''$ . Vi har då:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} &= \frac{1 - \cos\theta_1}{m_e c^2} \\ \frac{1}{E''} - \frac{1}{E'} &= \frac{1 - \cos\theta_2}{m_e c^2} = \frac{1 - \cos(\pi - \theta_1)}{m_e c^2}.\end{aligned}$$

Vi löser ut  $E''$  som ovan och sätter in i uttrycket med  $E''$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{E''} - \left( \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} + \frac{1}{E} \right) &= \frac{1 - \cos(\pi - \theta_1)}{m_e c^2} \\ E'' &= \frac{1}{\frac{1 - \cos(\pi - \theta_1)}{m_e c^2} + \left( \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} + \frac{1}{E} \right)} = \frac{1}{\frac{2}{m_e c^2} + \frac{1}{E}},\end{aligned}$$

där vi har använt det trigonometriska sambandet  $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ . Energin i bakåtriktningen är alltså oberoende av  $\theta_1$ . Därmed så har vi uttrycket som efterfrågas i b. Vi noterar att sambandet för två spridningspunkter är identiskt med uttrycket för en spridningspunkt.

För att undersöka vad som händer när Kirk går mot höga fotonenergier så låter vi  $E$  gå mot oändligheten. Då reduceras uttrycket ovan till  $m_e c^2 / 2 = 511 / 2 = 256$  keV. Comptonspridningen i bakåtriktningen ger alltså inte högre energier än så, vare sig för en eller två spridningspunkter.

## 6. Problem:

Under tiden som Kirk leker med sin gammapistol så arbetar Mr Spock med viktigare saker. Han har byggt en elektrontarget (med praktiskt taget stillastående elektroner) och nu arbetar han med en elektronaccelerator för att studera e-e-kollisioner.

Vid en e-e-kollision betraktat från masscentrumsystemet, så kommer de två elektronerna från varsitt håll med lika stor kinetisk energi,  $E_{\text{kin}}^{\text{cm}}$ . Spock har för sitt första testexperiment valt denna kinetiska elektronenergi till  $E_{\text{kin}}^{\text{cm}} = 10 \text{ [MeV]}$ .

Vilken kinetisk elektronenergi,  $E_{\text{kin}}^{\text{lab}}$  måste Spock ställa in på sin elektronaccelerator (i labsystemet) för att uppfylla kravet ovan? Ange svaret i enheten MeV. [5 p]

### Lösning:

Talet kan lösas på flera sätt. Vi börjar med att använda det faktum att följande uttryck är invariant, dvs oberoende av inertialsystemsbyte:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$$

I uttrycket så är  $E$  systemets totala, relativistiska energi, och  $p$  är den totala rörelsemängden. Vi kan således skriva:

$$\frac{(E_{\text{kin}}^{\text{lab}} + 2m_e c^2)^2}{c^2} - (p_{\text{lab}})^2 = \frac{(2E_{\text{kin}}^{\text{cm}} + 2m_e c^2)^2}{c^2} - (0)^2$$

Vi har också ett annat uttryck, för den ena elektronen, den som rör sig i labsystemet:

$$\frac{(E_{\text{kin}}^{\text{lab}} + m_e c^2)^2}{c^2} - (p_{\text{lab}})^2 = m_e^2 c^2$$

Vi kan nu eliminera  $p_{\text{lab}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{(E_{\text{kin}}^{\text{lab}} + 2m_e c^2)^2}{c^2} - \frac{(E_{\text{kin}}^{\text{lab}} + m_e c^2)^2}{c^2} &= \frac{(2E_{\text{kin}}^{\text{cm}} + 2m_e c^2)^2}{c^2} - m_e^2 c^2 \\ E_{\text{kin}}^{\text{lab}} &= \frac{4(E_{\text{kin}}^{\text{cm}})^2 + 8(E_{\text{kin}}^{\text{cm}})m_e c^2}{2m_e c^2} = \\ 2m_e c^2 \left( \left( \frac{E_{\text{kin}}^{\text{cm}}}{m_e c^2} + 1 \right)^2 - 1 \right) &= \\ 2 \cdot 0.511 \left( \left( \frac{10}{0.511} + 1 \right)^2 - 1 \right) &= \\ = 431.4 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Vi ser att Spocks accelerator måste klara att accelerera elektronerna till drygt 431 MeV.

Alternativ lösning:

Även utan kunskap om det invarianta uttrycket ovan så kan vi lösa problemet, t.ex. med hjälp av hastighetstransformationer. Vi låter masscentrumsystemet röra sig med hastigheten  $v$  i förhållande till labsystemet. Hastigheten på den infallande elektronen är  $u$  i labsystemet och  $u'$  i masscentrum. Hastigheten på den stillastående elektronen är då förstås lika med 0 i labsystemet och  $-u'$  i m.c.-systemet. Vi noterar sedan att den stillastående elektronen har hastigheten  $-v$  i m.c.-systemet, dvs vi har  $u' = v$ . Lorenztransformationen för hastigheter, för den infallande elektronen, kan således skrivas:

$$\begin{aligned} u &= \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'} = \frac{2u'}{1 + \frac{u'^2}{c^2}} \\ \left( \frac{u}{c} \right) &= \frac{2 \left( \frac{u'}{c} \right)}{1 + \left( \frac{u'}{c} \right)^2} \end{aligned}$$

Vi använder sedan följande samband mellan kinetisk energi,  $E_k$ , och hastighet:

$$E_k = m_e c^2 (\gamma - 1).$$

Applicerat på vårt problem skriver vi nu:

$$E_{\text{kin}}^{\text{lab}} = m_e c^2 (\gamma - 1) = m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

Om vi skriver detta uttryck i m.c.-systemet, och bryter ut  $u'/c$  så får vi istället:

$$\left( \frac{u'}{c} \right) = \sqrt{1 - \frac{1}{\left( \frac{E_{\text{kin}}^{\text{cm}}}{m_e c^2} + 1 \right)^2}}$$

Om vi vill undvika mer algebra så kan vi nu direkt sätta in det givna värdet på  $E_{\text{kin}}^{\text{cm}}$  och räkna ut hastigheten  $u'/c$ , sedan transformera till  $u/c$  och till slut räkna ut  $E_{\text{kin}}^{\text{lab}}$ .

Men det går förstås också utan problem att kombinera formlerna ovan för att få fram ett uttryck som ger  $E_{\text{kin}}^{\text{lab}}$  som funktion av  $E_{\text{kin}}^{\text{cm}}$ . Efter lite knåpande så ser det ut såhär:

$$2m_e c^2 \left( \left( \frac{E_{\text{kin}}^{\text{cm}}}{m_e c^2} + 1 \right)^2 - 1 \right)$$

Dett uttryck är förstås indentiskt med den första versionen av lösningen ovan och ger återigen, med insatta värden, en kinetisk energi på 431.4 MeV.

## 7. Problem:

Dr. Leonard McCoy, *Chief Medical Officer* ombord på Enterprise, är intresserad av att mäta blodvolymen hos en av sina patienter. Han använder radioaktivitet för att bestämma volymen på följande sätt:

Dr. McCoy preparerar först en lösning som innehåller  $^{24}\text{Na}$ , en radioaktiv natrium-isotop med halveringstiden 15.0 h. Patienten injiceras med  $0.5 \text{ cm}^3$  av lösningen som vid den tidpunkten har aktiviteten  $108 \mu\text{Ci}$  per liter. Lösningen blandar sig med blodet. Fem timmar efter injektionen (då vi med god marginal kan anta att lösningen är helt utblandad med allt blod) tas ett blodprov på  $2.0 \text{ cm}^3$ , och aktiviteten på detta prov mäts upp till 32 sönderfall per minut. Bestäm patientens blodvolym (i liter). [5 p].

### Lösning:

För aktiviteten som injiceras har vi:

$A_0 = 0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 108 \cdot 10^{-6} \cdot 3.7 \cdot 10^{10} = 1998 \text{ [Bq]}$ . Uttrycket för aktivitet som funktion ger värdet efter 5 timmar:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-t \ln 2 / t_{1/2}} = 1998 \cdot e^{-\ln 2 \cdot (5/15)} = 1585.8 \text{ [Bq]}.$$

Aktiviteten på provet,  $A_{\text{prov}} = 32/60 \text{ Bq}$  förhåller sig till  $A$  som provvolymen,  $V_{\text{prov}}$  till totalvolymen,  $V$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{prov}}}{V} &= \frac{A_{\text{prov}}}{A} \\ V &= \frac{V_{\text{prov}} A}{A_{\text{prov}}} = \frac{0.002 \cdot 1585.8}{32/60} = 5.9468 \text{ [l]}. \end{aligned}$$

Blodvolymen är ca 5.95 liter.

### 8. Problem:

Det är ofta svårt att direkt mäta massan för atomer/atomkärnor som har kort halveringstid. I vissa fall kan dock massan beräknas med stor noggrannhet utifrån experimentella data för atomkärnans sönderfall.

Den radioaktiva nukliden  $^{212}\text{Po}$  ( $t_{1/2} = 0.3 \mu\text{s}$ ) sönderfaller till den stabila nukliden  $^{208}\text{Pb}$  (atommassa: 207.976652 [u]) med alfasönderfall. Experimentellt så observeras en kinetisk energi för alfapartikeln på 8785 keV.

a) Beräkna alfasönderfallets  $Q$ -värde. [2 p].

b) Beräkna atommassan (i atomära massenheter [u]) för  $^{212}\text{Po}$ . [3 p].

#### Lösning:

För sambandet mellan alfapartikelns kinetiska energi,  $E_\alpha$  och  $Q$ -värdet så använder vi oss av rörelsemängdens bevarande samt att den frigjorda energin,  $Q$ , förelägger sig som kinetisk energi på alfapartikeln och dotterkärnan:

$$\begin{aligned} m_\alpha v_\alpha &= m_R v_R \\ Q = E_\alpha + E_R &= \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_R v_R^2}{2}. \end{aligned}$$

Efter lite algebra så får vi:

$$Q = E_\alpha \left( 1 - \frac{4}{208} \right) = 8954 \text{ keV},$$

vilket ger svaret för a. Vi har använt approximativa massor (heltal i enheten u) i uttrycket ovan. Det ger endast ett litet fel eftersom  $1 \gg 4/208$ . Här har vi räknat med klassiska formler. Det är rimligt eftersom den kinetiska energin är avsevärt mindre än alfapartikelns viloen energi  $m_\alpha c^2$  som ligger i storleksordningen 4 GeV.

För att få atommassan för Po-212 så skriver vi upp först uttrycket för att betrakta  $Q$  från de atomära massorna, och löser sedan ut massan för  $^{212}\text{Po}$ :

$$\begin{aligned} Q &= \Delta mc^2 = [m(^{212}\text{Po}) - m(^{208}\text{Pb}) - m(^4\text{He})] c^2 \\ m(^{212}\text{Po}) &= m(^{208}\text{Pb}) + m(^4\text{He}) + \frac{Q}{c^2} = \\ &= 207.976652 \text{ [u]} + 4.002603 \text{ [u]} + \frac{8.957 \text{ [MeV]}[\text{u}]}{931.502 \text{ [MeV]}} = 211.9889 \text{ u}. \end{aligned}$$

Detta värde överensstämmer (till 4:e decimalen) med den publicerade/tabellerade atomära massan för Po-212.