

KTH Fysik

Tentamen i **Fysikens matematiska metoder**

SI1200; SI1140 Del 2; SI1143

Torsdagen den 5 juni 2025 kl 8:00 – 13:00

Anteckna på varje blad: namn, personnummer, och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: bara formelsamlingen som delas ut

Obs! Miniräknare ej tillåten.

Notera gärna dina **bonuspoäng** på din tentamens första sida.

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan (Canvas)

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Inför och förklara konstanter och symboler du behöver!

Notation: $u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$; $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$; $x \in \mathbb{R}$ betyder $-\infty < x < \infty$

OBS: Om inget annat skrivs så kan man få full poäng även om man inte beräknar alla integraler.

1. ¹ Beräkna funktionen $u(r, t)$, $0 \leq r \leq R$ och $t \geq 0$, som uppfyller följande villkor,

$$u_{tt}(r, t) - c^2 \left[u_{rr}(r, t) + \frac{2}{r} u_r(r, t) \right] = 0 \quad (0 < r < R, t > 0),$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$u(r, 0) = u_0 \delta(r - r_0), \quad u_t(r, 0) = 0 \quad (0 < r < R);$$

$R > 0$, $c > 0$, $u_0 > 0$, $0 < r_0 < R$ är konstanter. Alla integraler skall beräknas för full poäng. *Ledning:* $u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r} \partial_r^2(ru)$. (6p)

2. (a) Bestäm $u(x, t)$, $0 \leq x \leq L$ och $t > 0$, så att följande villkor är uppfyllda,

$$\begin{cases} u_t(x, t) - au_{xx}(x, t) = 0 & (0 < x < L, t > 0), \\ u(0, t) = T_0, \quad u(L, t) = T_0 + Ae^{-\lambda t}, & (t > 0), \\ u(x, 0) = T_0 & (0 < x < L) \end{cases}$$

där $a > 0$, $L > 0$, $T_0 > 0$, $A > 0$, och $\lambda > 0$ är konstanter. *Ledning:* (i)

Ansatsen $u_p(x, t) = c + U(x)e^{-\lambda t}$ ger en partikulärlösning. (ii) $\sqrt{\frac{\lambda}{a} \frac{L}{\pi}} \notin \mathbb{Z}$. (iii)

$$\int_0^a \sin(bx) \sin(cx) dx = \frac{c \sin(ab) \cos(ac) - b \cos(ab) \sin(ac)}{b^2 - c^2}. \quad (4p)$$

(b) Ange en detaljerad fysikalisk tolkning av problemet! (2p)

3. Bestäm funktionen $y(x)$, $1 \leq x \leq 2$, som uppfyller $y(1) = 2$ och så att integralen

$$\int_1^2 (x^2 y'(x)^2 + 2y(x)^2 - 4y(x)) dx$$

är stationär ($y(2)$ är obestämmd, och $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$). (6p)

(v.g.v.)

¹Dina bonuspoäng från hemtalen under VT2025 adderas till dina poäng på uppgift 1, dock kan du maximalt få 6 poäng från uppgift 1 och hemtalen tillsammans.

4. Homogena cylindern $x^2 + y^2 \leq R^2$, som är mycket lång (så att man kan anta $z \in \mathbb{R}$), befinner sig vid tiden $t = 0$ i temperaturjämvikt med konstant temperaturen T_0 . Vid tiderna $t > 0$ är temperaturen vid randen $x^2 + y^2 = R^2$, $z \in \mathbb{R}$ konstant och lika med $T_1 > T_0$. Ställ upp en matematisk modell för temperaturutvecklingen inom cylindern vid tiden $t > 0$, och lös modellen. (2+4p)
5. En mycket lång och mycket tunn rak tråd har en konstant laddningstäthet q (i C/m). Tråden ligger i symmetriaxeln av en cylinder med radie R . Elektriska potentialen vid cylinderytan är $u_0 \cos(\varphi)$, där φ är en vinkelkoordinat längs cylinderytan och $u_0 > 0$ är en konstant. Bestäm den elektriska potentialen i cylindern! (6p)

Ledning: Elektriska potentialen uppfyller Poissonekvationen $-\Delta u(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ där $\rho(\mathbf{r})$ är laddningstätheten (i C/m³) som beskrivs i texten. Lösningen till inhomogena PDE:n i hela rummet (utan cylindern) kan ge en partikulärlösning. En lösning till specialfallet $q = 0$ av problemet kan ge delpoäng.

6. Funktionen $U(x, y, t)$, där $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ och $t \geq 0$, uppfyller differentialekvationen

$$U_t(x, y, t) - aU_{xx}(x, y, t) - bU_{yy}(x, y, t) = 0,$$

och villkoren

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} U(x, y, t) = 0,$$

$$U(x, y, 0) = U_0 \exp(-\kappa^2(x^2 + y^2)),$$

där $a > 0$, $b > 0$, $U_0 > 0$ och $\kappa > 0$ är konstanter.

Ange definitionen av Greensfunktionen till problemet, och beräkna Greensfunktionen! Alla integraler skall beräknas för full poäng. *Ledning:* Använd Fouriertransformen två gånger: en gång med avseende av x , och en gång med avseende av y . (6p)

LYCKA TILL!

Lösningsföreslag till tentamen i Fysikens matematiska metoder 250605
 I TYPED THIS QUICKLY: PLEASE LET ME KNOW BY EMAIL IF YOU FIND
 ANY MISTAKES/TYPOS. THANKS.

1. Ansatsen

$$u(r, t) = \sum_n f_n(r) g_n(t)$$

ger följande problem för funktionerna $f_n(r)$,

$$-f''(r) - \frac{2}{r}f'(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rf(r)) = \lambda f(r), \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0,$$

och g_n -problemet är

$$\ddot{g}(t) + c^2 \lambda g(t) = 0.$$

Alla lösningar till f -problemet är

$$f_n(r) = \frac{1}{r} \sin(k_n r), \quad k_n = \frac{n\pi}{R}, \quad \lambda_n = k_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

och den allmänna lösningen till g -problemet är

$$g_n(t) = a_n \cos(k_n c t) + b_n \sin(k_n c t).$$

Detta ger allmänna lösningen till PDE och RV:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin(k_n r) [a_n \cos(k_n c t) + b_n \sin(k_n c t)].$$

BV ger

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin(k_n r) a_n = u_0 \delta(r - r_0) \Rightarrow \\ a_n &= \frac{\int_0^r \frac{\sin(k_n r)}{r} u_0 \delta(r - r_0) r^2 dr}{\int_0^R \frac{\sin(k_n r)^2}{r^2} r^2 dr} = \frac{2}{R} u_0 \sin(k_n r_0) r_0 = u_0 \frac{2r_0}{R} \sin(k_n r_0), \\ u_t(r, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin(k_n r) k_n c b_n = 0 \Rightarrow b_n = 0. \end{aligned}$$

Svar:

$$u(r, t) = \frac{2r_0}{R} u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin(k_n r) \sin(k_n r_0) \cos(k_n c t), \quad k_n = n \frac{\pi}{R}.$$

2. (a) Ansatsen $u_p(x, t) = T_0 + U(x)e^{-\lambda t}$, PDE och RV ger

$$U''(x) + \kappa^2 U(x) = 0, \quad U(0) = 0, \quad U(L) = A, \quad \kappa^2 := \frac{\lambda}{a} \Rightarrow U(x) = A \frac{\sin(\kappa x)}{\sin(\kappa L)}.$$

(vi definierar κ för att få enkla formler nedan). Ansatsen $u(x, t) = u_p(x, t) + v(x, t)$
 ger

$$\begin{cases} v_t(x, t) - av_{xx}(x, t) = 0 & (0 < x < L, t > 0), \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, & (t > 0), \\ v(x, 0) = -A \frac{\sin(\kappa x)}{\sin(\kappa L)} & (0 < x < L). \end{cases}$$

Detta har lösningen

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) e^{-ak_n^2 t}, \quad c_n = -\frac{2}{L} \int_0^L A \frac{\sin(\kappa x)}{\sin(\kappa L)} \sin(k_n x) dx, \quad k_n = n \frac{\pi}{L}.$$

Integralen kan beräknas med ledningen:

$$c_n = -\frac{2A}{L \sin(\kappa L)} \frac{k_n \sin(L\kappa) \cos(Lk_n) - \kappa \cos(L\kappa) \sin(Lk_n)}{\kappa^2 - k_n^2} = \frac{2Ak_n(-1)^{n-1}}{L(\kappa^2 - k_n^2)}.$$

Svar:

$$u(x, t) = T_0 + A \frac{\sin(\kappa x)}{\sin(\kappa L)} e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ak_n(-1)^{n-1}}{L(\kappa^2 - k_n^2)} \sin(k_n x) e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = n \frac{\pi}{L}.$$

(OBS att med $A \frac{\sin(\kappa x)}{\sin(\kappa L)} e^{-\lambda t} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) e^{-\lambda t}$ kan detta skrivas som

$$u(x, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Aak_n(-1)^{n-1}}{L(ak_n^2 - \lambda)} \sin(k_n x) (e^{-\lambda t} - e^{-ak_n^2 t}), \quad k_n = n \frac{\pi}{L}. \quad (1)$$

)

(b) Värmeledning i en stav av längd L isolerad vid mantelytan. Vid tiden $t = 0$ är staven i temperaturjämvikt med konstant temperatur T_0 . Stavens randtemperatur vid $x = 0$ är lika med t_0 för all tider $t > 0$, men i randpunten $x = L$ ändras temperaturen abrupt till $T_0 + A$, men denna randtemperatur minskar exponentiellt mot T_0 för större tider.

3. Enligt teorin skall vi lösa Euler-Lagrange ekvationen

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'(x)} = \frac{\partial L}{\partial y(x)}$$

med randvillkoren

$$y(1) = 2, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial y'(x)} \right|_{x=2} = 0,$$

där $L = x^2 y'(x)^2 + 2y(x)^2 - 4y(x)$. Detta ger

$$\frac{d}{dx} 2x^2 y'(x) = 4y(x) - 4, \quad y(1) = 2, \quad y'(2) = 0.$$

ODE kan skrivas som

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = -2.$$

Det är en inhomogen linjär ODE med en partikulärlösning $y_{part}(x) = 1$ och den allmänna homogen lösning $y_{hom}(x) = c_1 x + c_2 x^{-2}$ (därför att ansatsen $y(x) = x^\lambda$ och hom. ODE ger $\lambda(\lambda + 1) - 2 = 0$, som har lösningar $\lambda = 1, -2$). Den allmänna lösningen till inhomogena ODE är

$$y(x) = y_{part}(x) + y_{hom}(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^{-2}.$$

RV ger

$$y(1) = 1 + c_1 + c_2 = 2, \quad y'(2) = c_1 - 2c_2 2^{-3} = c_1 - \frac{c_2}{4} = 0.$$

Detta ger $c_2 = 4c_1$, $1 + c_1 + 4c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{5}$, $c_2 = \frac{4}{5}$.

Svar: $y(x) = 1 + \frac{1}{5}x + \frac{4}{5x^2}$.

4. Temperaturen i cylindern kan modelleras med funktionen $T(r, t)$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ är avståndet från symmetriaxeln och $t \geq 0$ tiden. Modellen är

$$\begin{aligned} T_t(r, t) - a(\Delta T)(r, t) &= 0 \quad (0 < r < R, t > 0) \\ |T(0, t)| < \infty, \quad T(R, t) &= T_1 \quad (t > 0) \\ T(r, 0) &= T_0 \quad (0 < r < R), \end{aligned} \quad (2)$$

där $a > 0$ är värmediffusiviteten i cylindern, och $(\Delta T)(r, t) = T_{rr}(r, t) + \frac{1}{r}T_r(r, t)$.

Ansatsen $T(r, t) = T_1 + u(r, t)$ ger

$$\begin{aligned} u_t(r, t) - a(\Delta u)(r, t) &= 0 \quad (0 < r < R, t > 0) \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) &= 0 \quad (t > 0) \\ u(r, 0) &= T_0 - T_1 \quad (0 < r < R), \end{aligned} \quad (3)$$

som kan lösas med ansatsen

$$u(r, t) = \sum_n f_n(r)g_n(t)$$

där

$$-(\Delta f)(r) = \lambda f(r), \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0$$

och

$$\dot{g} + a\lambda g(t) = 0.$$

f-problemet har lösningarna

$$f_n(r) = J_0(k_n r), \quad k_n = \frac{\alpha_{0,n}}{R}, \quad \lambda_n = k_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

där $\alpha_{0,n}$ är nollställarna till Besselfunktionen $J_0(z)$: $J_0(\alpha_n) = 0$, och motsvariga lösningen till g -problemet är

$$g_n(t) = c_n e^{-ak_n^2 t}.$$

Detta ger den allmänna lösningen till ODE och RV:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(k_n r) e^{-ak_n^2 t}.$$

BV ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(k_n r) = T_0 - T_1 \Rightarrow c_n = \frac{\int_0^R (T_0 - T_1) J_0(k_n r) r dr}{\int_0^R J_0(k_n r)^2 r dr} = (T_0 - T_1) C_n.$$

Detta ger svaret

$$T(r, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(k_n r) e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = \frac{\alpha_{0,n}}{R}$$

där $C_n = \int_0^R J_0(k_n r) r dr / \int_0^R J_0(k_n r)^2 r dr$ kan beräknas (men det krävs inte för full poäng).

5. (Det är lika som problem 5.8 i övningsboken som gjorden i en övning)

Problemet lyder

$$-(\Delta u)(\mathbf{r}) = q\delta^2(\mathbf{r}), \quad u(\mathbf{r})|_{|\mathbf{r}|=R} = u_0 \cos(\varphi). \quad (4)$$

Enligt formelbladet har inhom. ODE en lösning

$$u_{part}(r) = -\frac{q_0}{2\pi} \ln(r/R)$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ansatsen

$$u(r, \varphi) = -\frac{q_0}{2\pi} \ln(r/R) + v(r, \varphi)$$

ger

$$v_r r(r, \varphi) + \frac{1}{r} v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = 0 \quad (0 < r < R)$$

$$|v(0, \varphi)| < \infty, \quad v(R, \varphi) = u_0 \cos(\varphi)$$

(pga $u_{part}(R) = 0$). Ansatsen $v(r, \varphi) = f(r) \cos(\varphi)$ ger ODE problemet

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - f(r) = 0, \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = u_0.$$

Ansatsen $f(r) = r^\lambda$ ger $\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1, -1$, som ger den allmänna lösningen

$$f(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}.$$

RV ger $c_2 = 0$, $c_1 = u_0/R$.

Svar:

$$u(r, \varphi) = -\frac{q_0}{2\pi} \ln(r/R) + u_0 \frac{r}{R} \cos(\varphi).$$

6. Greensfunktionen $G = G(x, y, t; x', y', t')$ är lika med lösningen till problemet

$$U_t(x, y, t) - aU_{xx}(x, y, t) - bU_{yy}(x, y, t) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(t - t') \quad (x, y \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$\lim_{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty} U(x, y, t) = 0 \quad (t > 0)$$

$$U(x, y, 0) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}), \quad (5)$$

där $x', y' \in \mathbb{R}$ och $t' > 0$.

Fouriertransformen

$$\hat{U}(\vec{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} U(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^2r$$

där $\vec{k} = (k_x, k_y)$, $\vec{r} = (x, y)$ och $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y$, ger

$$\hat{U}_t(\vec{k}, t) + (ak_x^2 + bk_y^2)\hat{U}(\vec{k}, t) = \delta(t - t')e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'}, \quad \hat{U}_t(\vec{k}, 0) = 0,$$

som har lösningen

$$\hat{U}(\vec{k}, t) = \theta(t - t')e^{-(ak_x^2 + bk_y^2)(t - t')}e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'},$$

där θ är Heavisidefunktionen. Detta ger

$$\begin{aligned} U(\vec{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t - t')e^{-(ak_x^2 + bk_y^2)(t - t')}e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \\ &= \theta(t - t') \int_{\mathbb{R}} e^{-ak_x^2(t - t')} e^{ik_x(x - x')} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-bk_y^2(t - t')} e^{ik_y(y - y')} \frac{dk_y}{2\pi}, \end{aligned}$$

som kan beräknas och ger

$$U(\vec{r}, t) = \theta(t - t') \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t - t')}} e^{-(x - x')^2 / 4a(t - t')} \frac{1}{\sqrt{4\pi b(t - t')}} e^{-(y - y')^2 / 4b(t - t')}.$$

Svar:

$$G(x, y, t; x', y', t') = G_0(x - x', y - y'; t - t')$$

där

$$G_0(x, y; t) = \theta(t) \frac{1}{4\pi\sqrt{abt}} e^{-x^2/4at - y^2/4bt}.$$