

Tentamen i SE1055 Hållfasthetslära grundkurs med energimetoder, 25 augusti 2017

Resultat finns på Mina Sidor senast 15/9 2017 kl. 17. Begäran av omprövning inom en månad.

Hjälpmedel: Formelsamling i hållfasthetslära, matematisk handbok och räknedosa.

Examinator: Bo Alfredsson, tel 790 7667

OBS! Skriv endast på en sida av bladen.

Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad.

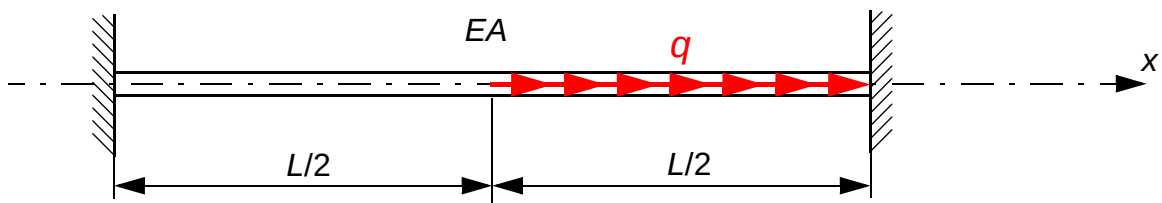
Rita gärna figurer i färg men ej med rödpenna.

Exakt metod ska användas för lösning om inte annat anges i uppgiften.

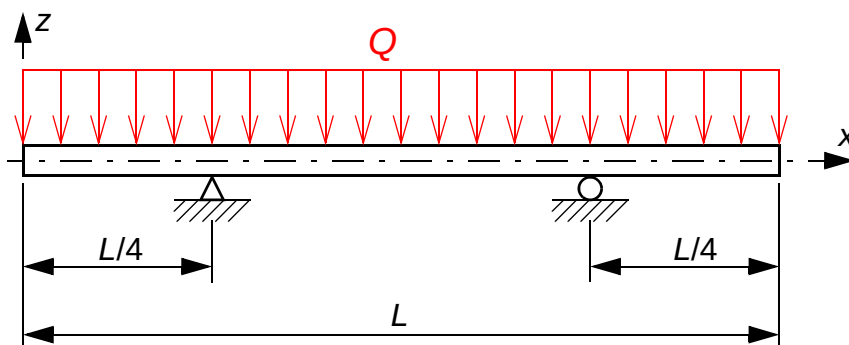
Betygsgränser: 0 - 11 ger F; 12 - 13 ger FX; 14 - 17 ger E; 18 - 21 ger D; 22 - 24 ger C; 25 - 28 ger B; 29 - 40 ger A.

FX = Komplettering till E; information anslås på kurshemsidan när resultatet är klart.

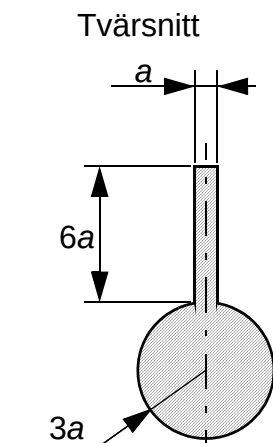
1. En stång är fast inspänd mellan två stela väggar. På den högra halvan av stången verkar en utbredd volymkraft q [N/m³], se figuren. Bestäm förskjutningen $u(x)$ hos stången. Stången är L lång med elasticitetsmodul E och tvärsnittsarea A . (6p)



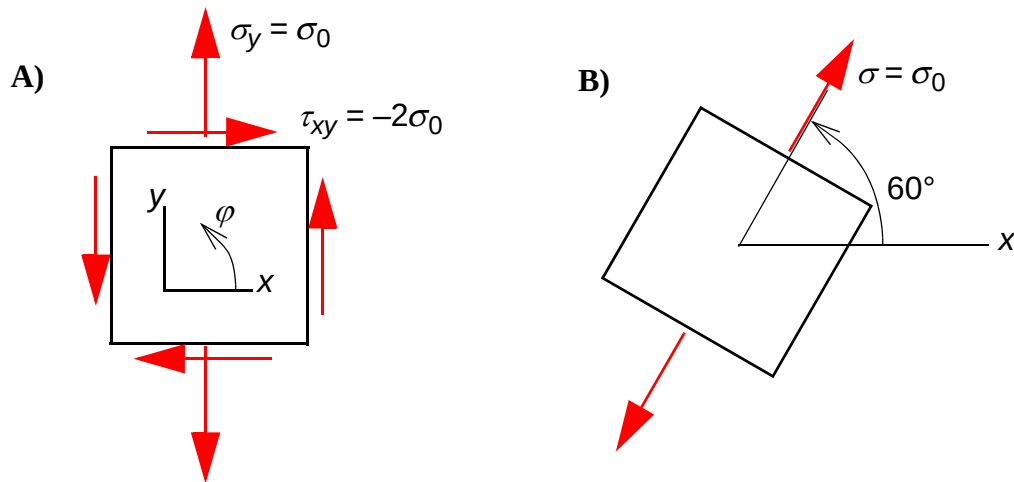
2. En fritt upplagd balk med tvärsnitt enligt figuren belastas med en jämnt utbredd last över hela sin längd. Den totala lasten är $Q = 2000$ N. Bestäm den till beloppet största böjspänningen $|\sigma_b|_{\max}$ i balken. (6p)



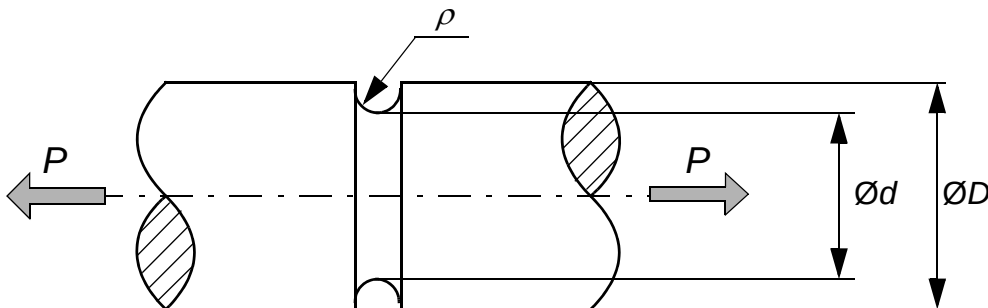
$$\begin{aligned} Q &= 2000 \text{ N} \\ L &= 4 \text{ m} \\ a &= 5 \text{ mm} \end{aligned}$$



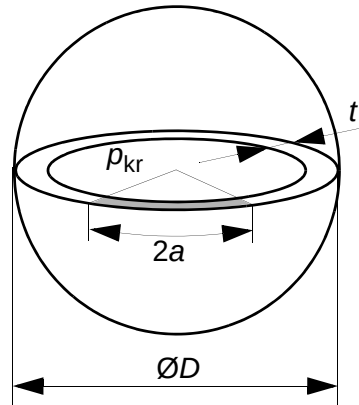
3. En tunn skiva är belastad med spänningstillståndet **A** enligt figuren. Till detta adderas spänningstillståndet **B**. Bestäm största huvudspänning och dess riktning φ_1 relativt x -riktningen för det kombinerade spänningstillståndet. (6p).



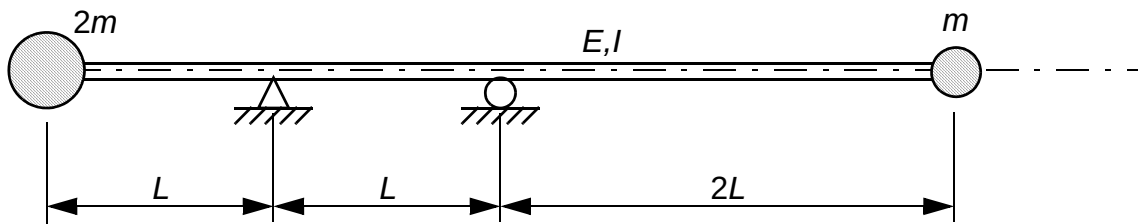
4. På kolvstången till en hydraulcylinder ska ett spår svarvas för en tätande O-ring. Vilken ytfinhet måste man åstadkomma i spåret om säkerheten mot utmattning ska vara minst $n_u = 2$? Kolvstångens diameter är $\varnothing D = 20$ mm, spårets radie är $\rho = 2$ mm och diametern hos spåret är $\varnothing d = 17$ mm. Den växlande drag- och tryckbelastningen har amplituden $P_a = 12$ kN. Materialet är rostfritt stål 2324-02. (6p)

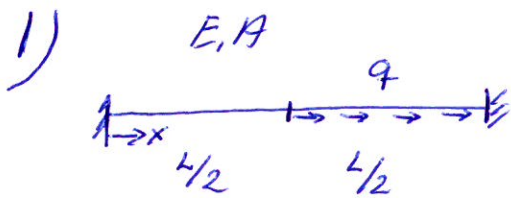


5. Ett tunnväggigt sfäriskt tryckkärl har en genomgående spricka. Godstjockleken $t = 15$ mm, medeldiametern $\varnothing D = 1,0$ m, spricklängden $2a = 46$ mm, brottsegheten $K_{Ic} = 35 \text{ MPam}^{1/2}$ och flytspänningen $\sigma_s = 490$ MPa. Bestäm det kritiska inre övertryck p_{kr} som gör att sprickan växer. Gäller teorin? (6p)



6. Två punktmassor är monterade på en fritt upplagd masslös balk enligt figuren. Balken har längden $4L$, elasticitetsmodulen E och yttroghetsmomentet I . Bestäm systemets samtliga egenfrekvenser för böjmoder och deras amplitudförhållanden. (6p)





$$V: 0 < x < \frac{L}{2}$$

$$H: \frac{L}{2} < x < L$$

$$EA u_v'' = 0$$

$$RV: u_v(0) = 0$$

$$EA u_H'' + qA = 0 \quad FS \ 6.20$$

$$u_H(L) = 0$$

$$u_v(\frac{L}{2}) = u_H(\frac{L}{2})$$

$$N_v(\frac{L}{2}) = N_H(\frac{L}{2}) \Rightarrow u_v'(\frac{L}{2}) = u_H'(\frac{L}{2})$$

$$EA \varepsilon_v(\frac{L}{2}) = EA \varepsilon_H(\frac{L}{2})$$

$$V: u_v'' = 0$$

$$u_v' = C_1$$

$$u_v = C_1 x + C_2$$

$$u_v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$H: u_H'' = -\frac{q}{E}$$

$$u_H' = -\frac{q}{E}x + D_1$$

$$u_H = -\frac{q x^2}{2E} + D_1 x + D_2$$

$$D_2 = \frac{q L^2}{2E} - D_1 L$$

$$u_v'(\frac{L}{2}) = C_1 = -\frac{q L}{2E} + D_1 = u_H'(\frac{L}{2})$$

$$u_v(\frac{L}{2}) = C_1 \frac{L}{2} = -\frac{q L^2}{8E} + \frac{D_1 L}{2} + D_2 = u_H(\frac{L}{2})$$

$$\Rightarrow -\frac{q L^2}{4E} + \cancel{D_1 \frac{L}{2}} = -\frac{q L^2}{8E} + \cancel{D_1 \frac{L}{2}} + \frac{q L^2}{2E} - D_1 L \Rightarrow D_1 = \frac{5qL}{8E}$$

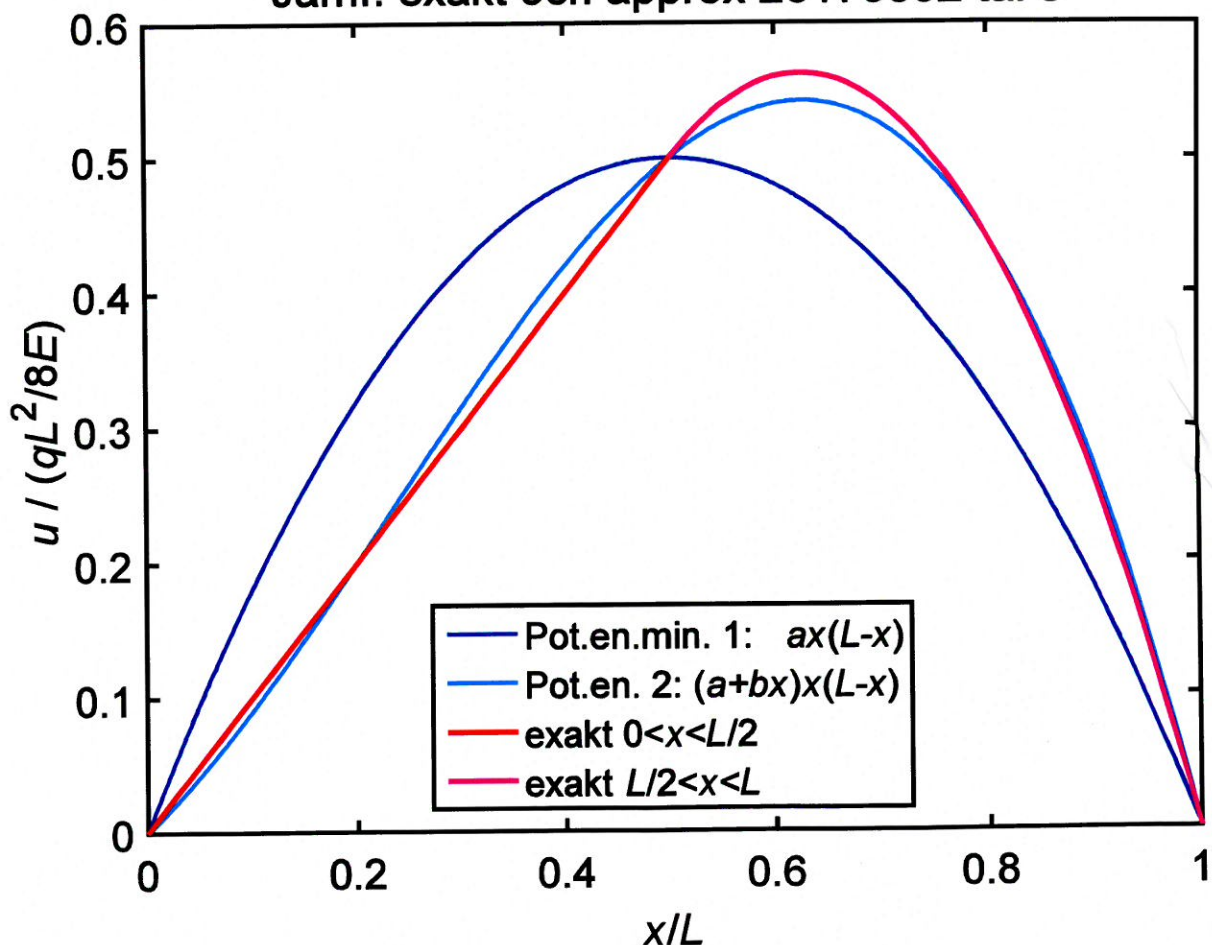
$$D_2 = -\frac{q L^2}{8E}$$

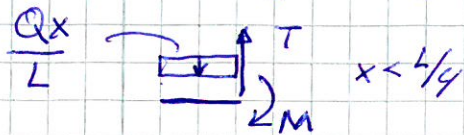
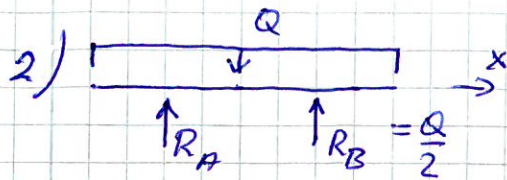
$$0 < x < \frac{L}{2}: u_v = \frac{qL}{8E} x$$

$$\frac{L}{2} < x < L: u_H = \frac{q L^2}{8E} \left[-\frac{4x^2}{L^2} + 5\frac{x}{L} - 1 \right]$$

$$C_1 = \frac{qL}{8E}$$

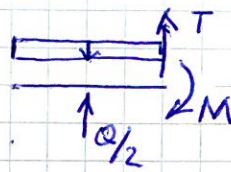
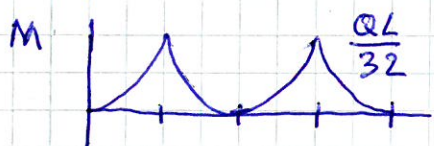
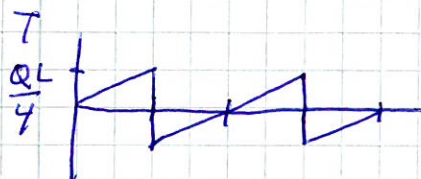
Jämf. exakt och approx 20170602 tal 5





$$\uparrow T = \frac{Qx}{L}$$

$$\curvearrowright M = \frac{Qx^2}{2L}, \quad M\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{QL}{32}$$



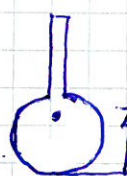
$$\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}$$

$$\uparrow T = -\frac{Q}{2} + \frac{Qx}{L}$$

$$M\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{QL}{32}$$

$$\curvearrowright M = \frac{Qx^2}{2L} - \frac{Q}{2}\left(x - \frac{L}{4}\right) \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = 0!$$

$$M_{b,max} = M\left(\frac{L}{4}\right) = M\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{QL}{32}$$



$$e(9\pi a^2 + 6a^2) = 3a \cdot 9\pi a^2 + 9a \cdot 6a^2$$

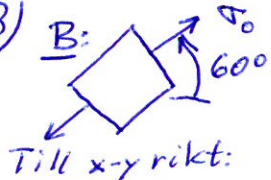
$$e \Rightarrow e = \frac{27(\pi + 2)a}{3(3\pi + 2)} \approx 4,05a$$

$$I = \sum I_i + b_i^2 A_i = \frac{\pi(3a)^4}{4} + \pi(3a)^2(e - 3a)^2 + \frac{a(6a)^3}{12} + (9a - e)^2 \approx 259,8a^4$$

$$|z|_{max} = 12a - e \approx 7,95a$$

$$|\sigma_b|_{max} = \frac{|M_b|_{max} \cdot |z|_{max}}{I} = \frac{956,2 \cdot 10^{-6} \frac{QL}{a^3}}{I} = 61,2 \text{ MPa}$$

3) B: FS 1.17, 1.18



$$\varphi = -60 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_0 \cos^2(-60) = \frac{1}{4} \sigma_0$$

$$(\tau_{\varphi=0}, \sigma_{\varphi+90}=0) \quad \tau_{xy} = -\frac{\sigma_0}{2} \sin(-120) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_0$$

$$\varphi = 30 \Rightarrow \sigma_y = \sigma_0 \cos^2(30) = \frac{3}{4} \sigma_0$$

A+B:

$$\sigma_x = \frac{1}{4} \sigma_0$$

$$\sigma_y = \sigma_0 + \frac{3}{4} \sigma_0 = \frac{7}{4} \sigma_0$$

$$\tau_{xy} = -2\sigma_0 + \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma_0 = -(2 - \sqrt{3}) \frac{\sigma_0}{4}$$

FS 1.19

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_0}{4} \left[4 \pm \sqrt{9 + (8 - \sqrt{3})^2} \right]$$

76 - 16√3

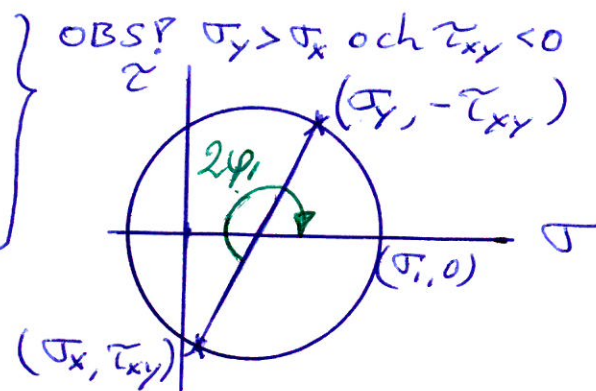
$$\sigma_1 = 2,737 \sigma_0$$

$$\sigma_2 = -0,737 \sigma_0$$

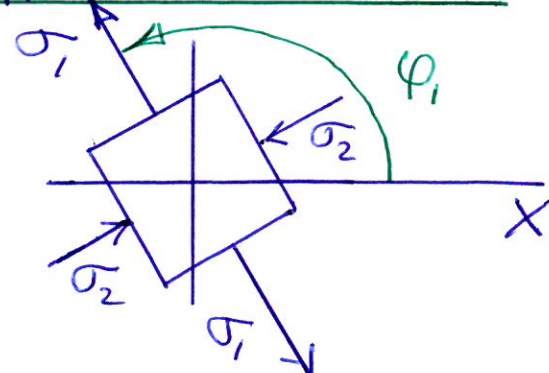
$$\tan 2\varphi = \frac{-2(8 - \sqrt{3})}{1 - 7} = 2,089$$

$$\varphi = 32,2^\circ$$

är detta φ_1 eller φ_2



$$\varphi_1 = \varphi + 90^\circ = 122,2^\circ$$



4) 2324-02 $\Rightarrow \sigma_u = 250 \text{ MPa}$
 $\sigma_B = 590 \text{ MPa}$

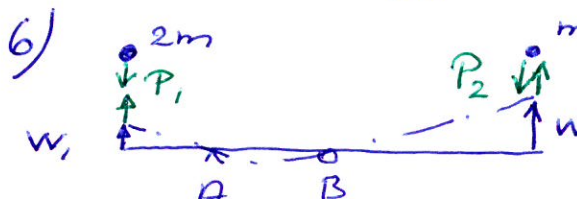
$\left(\frac{D}{d} = \frac{20}{17} = 1,18 \right)$
 $\left(\frac{s}{d} = \frac{2}{17} = 0,12 \right)$

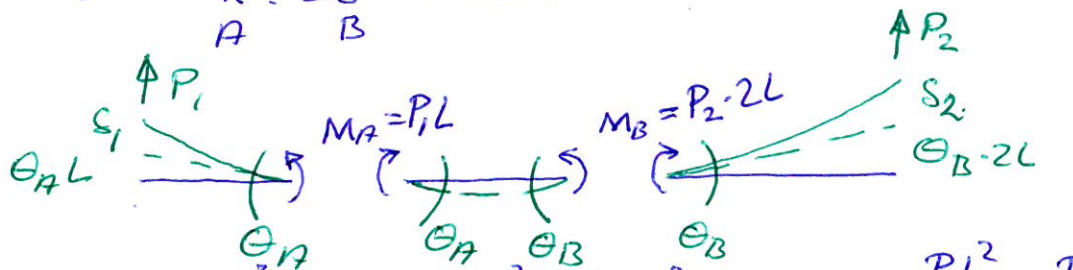
FS 32.5.1: $K_t = 2,0$
 FS 25.9: $q = 0,78$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} K_t = 2,0 \\ q = 0,78 \end{matrix}} \right\} K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1,78$

$\sigma_a = \frac{4 P_a}{\pi d^2} \leq \sigma_{util} = \frac{\sigma_{ured}}{n_u} = \frac{\sigma_u}{n_u K_f K_r} \Rightarrow \frac{1}{K_r} \geq \frac{4 P_a n_u K_f}{\pi d^2 \sigma_u} = 0,753$

FS 25:12: $R_a \leq 22 \mu\text{m}$

5) FS 23.10.15 $K_1 = \frac{P_o r}{2t} \sqrt{\pi a} f_{15}(\lambda)$, $r = \frac{D}{2}$, $\lambda = \frac{a}{\sqrt{r t}}$
 $\lambda = 0,2656 \Rightarrow f_{15} = 1,0489$ $K_1 = K_{1c} \Rightarrow p_{kn} = 7,45 \text{ MPa}$
 $l_{min} > 2,5 \left(\frac{K_{1c}}{\sigma_s} \right)^2 = 12,8 \text{ mm} < t, a \Rightarrow \text{ok}$

6)  $\text{masses: } -P_1 = 2m \ddot{w}_1 \Rightarrow -\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{bmatrix}$

 FS 31.1.1
 32.2.5
 $s_2 = \frac{P_2 8L^3}{3EI}$

$s_1 = \frac{P_1 L^3}{3EI}$ $\Theta_A = \frac{P_1 L^2}{3EI} + \frac{P_2 2L^2}{6EI}$, $\Theta_B = \frac{P_1 L^2}{6EI} + \frac{P_2 2L^2}{3EI}$

$w_1 = \frac{L^3}{3EI} (2P_1 + P_2)$, $w_2 = \frac{L^3}{3EI} (P_1 + 12P_2) \Rightarrow \underline{w} = \frac{L^3}{3EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$

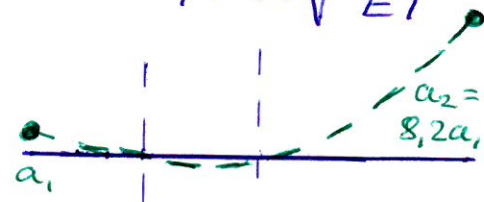
$\underline{w} - \alpha \underline{P} = 0 \Rightarrow \underline{w} + \alpha \underline{M} \underline{\ddot{w}} = 0 \Rightarrow |\underline{I} - \alpha \underline{M} \omega_e^2| = 0 \Rightarrow |\alpha \underline{M} - \underline{I} \frac{1}{\omega_e^2}| = 0$
 FS 11.22, 11.23

$\frac{1}{\omega_e^2} = \alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 \pm \sqrt{(\alpha_{11} m_1 - \alpha_{22} m_2)^2 + 4 \alpha_{12} \alpha_{21} m_1 m_2}$

$\frac{1}{\omega_{e1}^2} = \frac{8 + \sqrt{18}}{3} \frac{mL^3}{EI} \Rightarrow \omega_{e1} = \sqrt{\frac{3}{8 + \sqrt{18}}} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} = 0,495 \sqrt{\frac{mL^3}{EI}}$

$\frac{1}{\omega_{e2}^2} = \frac{8 - \sqrt{18}}{3} \frac{mL^3}{EI} \Rightarrow \omega_{e2} = \sqrt{\frac{3}{8 - \sqrt{18}}} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} = 0,894 \sqrt{\frac{mL^3}{EI}}$

$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)_{\omega_{e1}} = \frac{8 + \sqrt{18} - 4}{1} = 4 + \sqrt{18} = 8,243$



$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)_{\omega_{e2}} = \frac{8 - \sqrt{18} - 4}{1} = 4 - \sqrt{18} = -0,243$

