

TENTAMEN, DEL 2
SF1544
 NUMERISKA METODER, GRUNDKURS IV
 Torsdag 16 mars 2023 kl 14.00–17.00

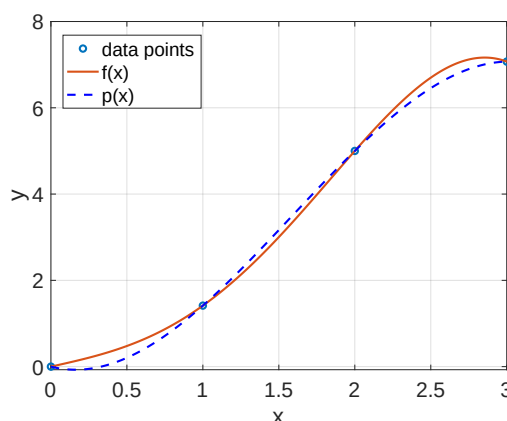
Rättas endast om Del 1 är godkänd. Maximalt antal poäng på denna del är 50.

Betygsgränser: 10 p D, 20 p C, 30 p B, 40 p A.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

- P1.** Tredjegradspolynomet $p(x)$ interpolerar funktionen $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}x)(1+x^2)$ i punkterna $x = 0, 1, 2, 3$ (se figur).



Figur 1: Grafen till $\sin(\frac{\pi}{4}x)(1+x^2)$ och $p(x)$.

- (4 p) **a)** Skriv en algoritm som bestämmer polynomet $p(x)$, utan att använda inbyggda fit-funktioner (som t.ex. `polyfit`).
- (7 p) **b)** Skriv ett program som räknar ut skillnaden i båglängd för kurvorna $f(x)$ och $p(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 3$. Skillnaden i båglängd ska beräknas med ett fel mindre än en given feltolerans. Alla integraler måste beräknas med hjälp av en egenskriven trapetsregel. (Du får alltså inte använda inbyggda funktioner som t.ex. `trapz` för att beräkna integraler.)

Tips: Båglängden L för en kurva $y(x)$ i intervallet $a \leq x \leq b$ ges av integralen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

- (6 p) c) Beskriv en detaljerad algoritm som beräknar b^* så att båglängden för kurvan $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq b^*$ blir 1. Algoritmen måste vara effektiv. Programkod är inte nödvändig för full poäng.

P2. Vi vill lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} ye^x + \ln(x) &= 2 \\ x^2y + ye^x &= -1. \end{aligned}$$

- (7 p) a) Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för systemet i detalj. Alla ingående storheter ska skrivas ut explicit.
- (6 p) b) Skriv ett program som använder Newtons metod för att bestämma lösningen med ett fel mindre än 10^{-10} i både x och y . Använd $x = 1$, $y = 1$ som startgissning.
- (2 p) c) Formulera en fixpunktsiteration, som inte är Newtons metod, för att lösa ekvationssystemet. Du behöver inte kontrollera konvergensen i detta exempel.
- (15 p) **Alternativ uppgift P2.** Formulera och bevisa en sats om stabilitet av en explicit differensmetod för värmeledningsekvationen.

Lös antingen P2 eller alternativa uppgift P2, inte båda. Om lösningar till den alternativa uppgiften lämnas in är det de som kommer bedömas.

- P3.** Temperaturen i ett cylindriskt föremål ges av lösningen till den partiella differentialekvationen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{4K} \frac{\partial T}{\partial t}, & \frac{1}{2} < r < 1, & \quad 0 < t < 10, \\ T(\tfrac{1}{2}, t) &= t, \quad T(1, t) = 100 + 40t, & 0 \leq t \leq 10, & \quad (\clubsuit) \\ T(r, 0) &= 200(r - 0.5), & \frac{1}{2} \leq r \leq 1, & \end{aligned}$$

där $T = T(r, t)$ är temperaturen, r det radiala avståndet från cylinderns centerlinje, t är tiden och K en given materialspecifik parameter. Vi antar att $K = 0.6$.

- (4 p) **a)** Antag i ett första steg att man förenklar problemet genom att sätta $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ och löser randvärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} &= 0, & \frac{1}{2} < r < 1, \\ T(\tfrac{1}{2}) &= 0, \quad T(1) = 100. & (\diamond)\end{aligned}$$

Ställ upp det linjära ekvationssystem (i matrisform) som behöver lösas just i detta fall då man använder finita differensmetoden med centraldifferens för att approximera $\frac{d^2 T}{dr^2}$ och $\frac{dT}{dr}$.

- (5 p) **b)** Skriv ett program som löser randvärdesproblemet i uppgift a) med steglängden $h = \Delta r = 0.1$. Programmet ska även plotta grafen till lösningen $T(r)$ i intervallet $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$.
- (3 p) **c)** Vi vill nu använda metoden framåt Euler (framåtdifferens) för att lösa den ursprungliga partiella differentialekvationen ($\clubsuit$). Skriv upp det numeriska uttrycket för T_i^{j+1} , där $T_i^j \approx T(i\Delta r, j\Delta t)$. Använd som tidigare centraldifferens för att approximera $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ och $\frac{\partial T}{\partial r}$. (I detta steg kan du bortse från randvillkor och begynnelsevillkor.)
- (6 p) **d)** Skriv ett program som använder ditt numeriska uttryck från uppgift c) för att hitta en approximation till $T(r, 10)$ med steglängderna $h = \Delta r = 0.1$ och $k = \Delta t = 0.001$. Glöm inte rand- och begynnelsevillkor.