

Tentamen i Hållfasthetslära grundkurs med energimetoder (SE1055)

3 juni 2021, 14:00-19:00

Hjälpmedel: Skrivhjälpmedel inklusive linjal, Formelsamling i hållfasthetslära, matematisk handbok, TeFyMa och räknedosa.

Kursansvarig och jourhavande lärare: Erik Olsson, 073-033 04 25, erolsson@kth.se

Examinator: Per-Lennart Larsson, 08-790 75 40, plla@kth.se

Betygsgränser: F: 0-11; Fx: 12-13; E: 14-17; D: 18-21; C: 22-24; B: 25-28; A: 29-40

Fx ger möjlig komplettering till E.

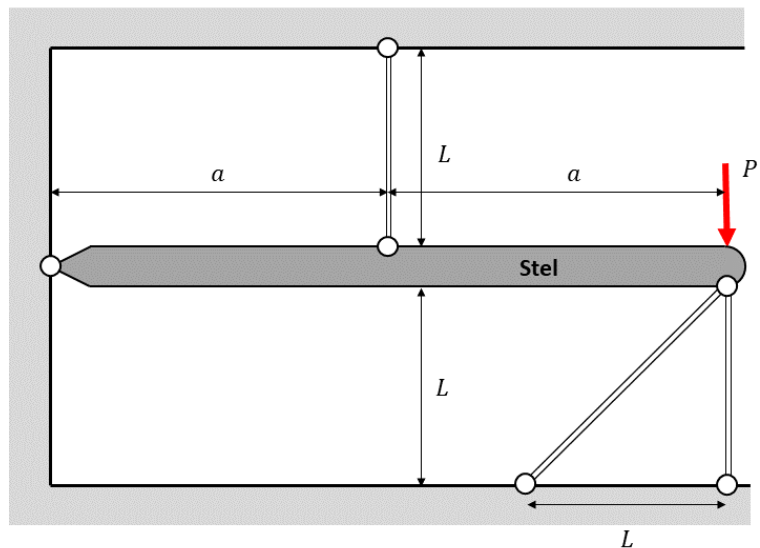
Resultatet presenteras senast den 24:e juni.

Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad och spara originalen tills resultatet är rapporterat.

Problem 1 (6 poäng)

En stel horisontell bom sitter upphängd med tre stänger. Stängerna är av stål, med elasticitetsmodul $E = 200 \text{ GPa}$ och sträckgräns $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$. De vertikala stängerna har en längd $L = 1 \text{ m}$ och den diagonala är en faktor $\sqrt{2}$ längre. Alla stänger har samma tvärsnitt, cirkulärt med radie $R = 5 \text{ mm}$.

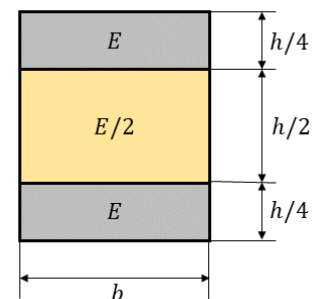
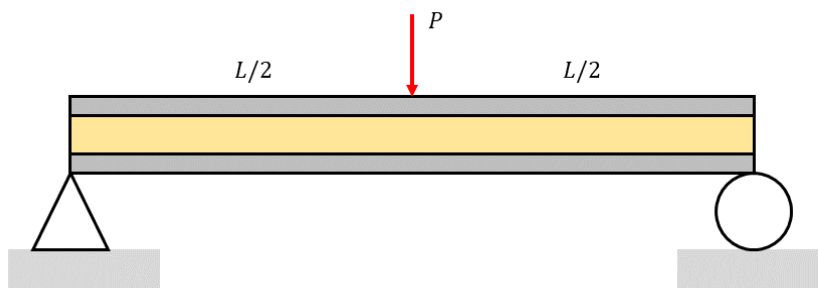
Bestäm hur stor kraft P nedåt som kan anbringas där de två yttersta stängerna är festsatta i bommen om ingen stång får plasticeras eller knäckas. Alla deformationer kan antas vara små och inga moment kan tas upp i lederna.



Problem 2 (6 poäng)

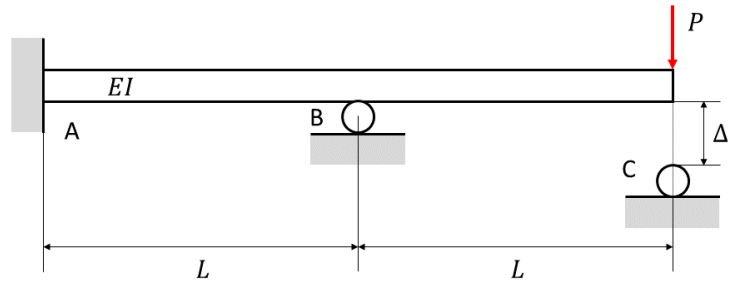
En fritt upplagd balk med längden L belastas med en punktkraft P nedåt mitt på balken enligt figuren nedan. Balkens rektangulära tvärsnitt med bredd b och höjd h , visas till höger i figuren nedan. Tvärsnittet består av två olika elastiska material som är förbundna så att glidning mellan materialen inte kan ske. De yttersta $h/4$ har elasticitetsmodul E och det $h/2$ höga skiktet i mitten har elasticitetsmodul $E/2$. **Beräkna den största böjspänningen som uppkommer i balken.**

Ledning: Töjningen kan skrivas som $\varepsilon = \kappa z$ där κ är balkens krökning.



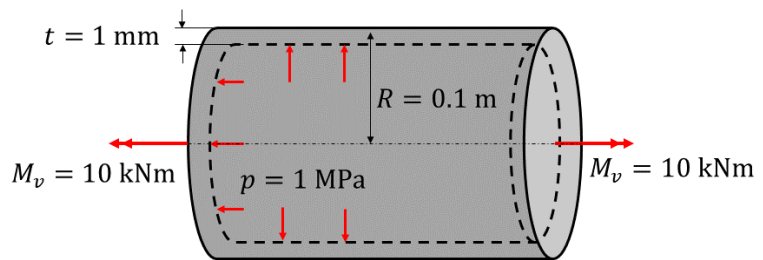
Problem 3 (6 poäng)

En $2L$ lång elastisk konsolbalk med böjstyvhets EI sitter fastspänd i en vägg (A) enligt figuren till höger. Obelastad är konsolbalken precis i kontakt med stödet B så att ingen reaktionskraft uppstår. **Hur stor kraft P behöver anbringas nedåt vid balkens högra ände för att änden ska nudda stödet C?** Avståndet Δ som balkänden behöver flyttas nedåt är mycket mindre än L .



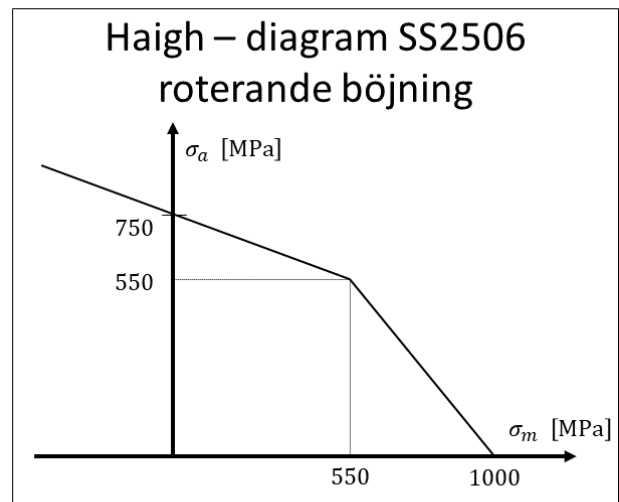
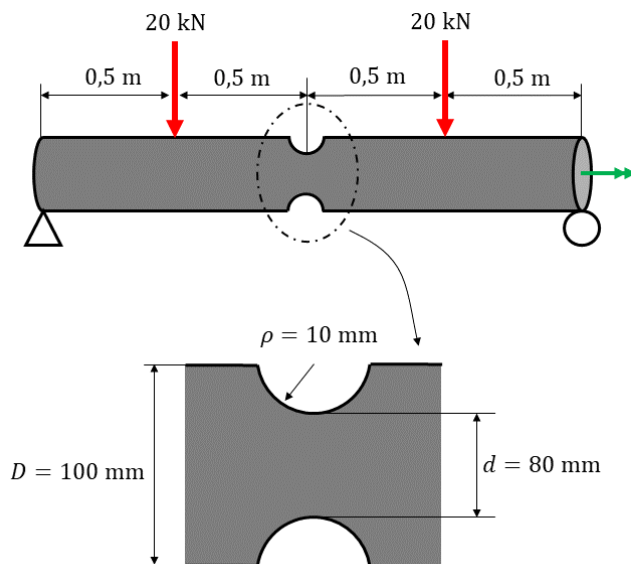
Problem 4 (6 poäng)

Ett tunnvägigt cylindriskt tryckkärl visas till höger som belastas av ett inre övertryck på $p = 1$ MPa. Kärlet har en medelradie på $R = 0.1$ m och en godstjocklek på $t = 1$ mm. För att montera kärlet så behövde man lägga på ett vridmoment på $M_v = 10$ kNm och nu är man rädd för att kärlet ska plasticera. **Beräkna von Mises effektivspänning i tryckkärlets vägg.**



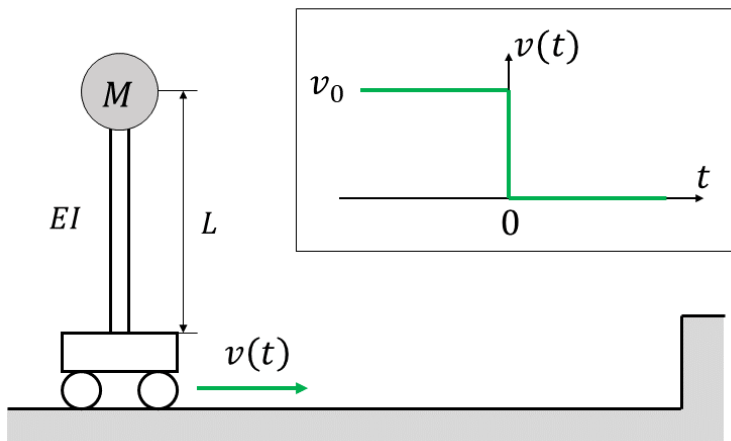
Problem 5 (6 poäng)

En roterande axel som har en diameter på $D = 100$ mm och som är 2 m lång belastas i böjning enligt figuren nedan med två symmetriskt placerade punktkrafter på vardera 20 kN. Centrerat på axeln finns en anvisning med dimensioner i den uppförstorade figuren. Axeln är av materialet SS2506 och är sätthärdad vilket har orsakat restspänningar på -350 MPa (tryck). Nödvändig materialdata är presenterad som ett Haigh-diagram till höger i figuren där det även indikeras att man kan extrapolera linjärt till mittspänningar i tryck. **Bestäm säkerhetsfaktorn mot utmattning för axeln.**



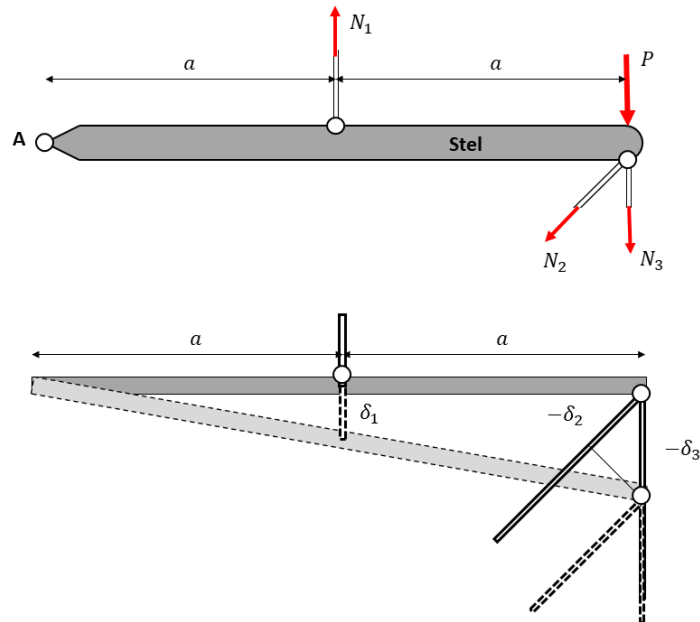
Problem 6 (6 poäng)

Till höger visas en konsolbalk med längd L och böjstyvhets EI som sitter fast inspänd i en vagn. Längst ut på balken sitter en punktmassa M . Vagnen, balken och massan rör sig till höger med hastigheten v_0 men vid tiden $t = 0$ kolliderar vagnen med en stel vägg och vagnen stannar. Vagnens hastighet visas i grafen. **Bestäm det maximala värdet av böjmomentets absolutbelopp som uppkommer i balken.** Eventuell inverkan av gravitationen kan försummas.



Lösningsförslag Tentamen 2021-06-03

Problem 1



Från den övre figuren fås momentjämvikten moturs runt **A**

$$-aN_1 + 2aP + 2aN_3 + 2aN_2/\sqrt{2} = 0$$

Eller

$$N_1 = 2P + 2N_3 + \sqrt{2}N_2$$

Från den nedre figuren fås deformationssambanden

$$2\delta_1 = -\delta_3$$

$$\sqrt{2}\delta_2 = \delta_3$$

Materialsamband för varje stång

$$\delta_i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

Insatt i deformationssambanden

$$2\frac{N_1 L}{EA} = -\frac{N_3 L}{EA} = -\sqrt{2}\frac{N_2 \sqrt{2}L}{EA}$$

Förkortat

$$2N_1 = -N_3 = -2N_2$$

Insatt i jämvikt

$$N_1 = 2P - 4N_1 - \sqrt{2}N_1$$

Löser N_1 och därefter N_2 och N_3

$$N_1 = \frac{2}{5 + \sqrt{2}}P$$

$$N_2 = -\frac{2}{5 + \sqrt{2}}P$$

$$N_3 = -\frac{4}{5 + \sqrt{2}}P$$

Stång 3 plasticerar först vilket sker vid en last

$$P_s = \frac{5 + \sqrt{2}}{4}\sigma_s A = 25.2 \text{ kN}$$

Stång 2 och stång 3 kan knäckas då dessa befinner sig i tryck. Knäckkraften för varje stång ges av Eulers knäckfall 2

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{L_i^2} \quad \text{med} \quad I = \frac{\pi r^4}{4}$$

Numeriskt blir detta för stång tre 969 N och halva detta värde för stång 2. Då normalkraften i stång 2 är halva den i stång tre så betyder det att knäckning sker i båda stängerna samtidigt och den yttre last som krävs för knäckning blir

$$\frac{5 + \sqrt{2}}{4} \cdot 969 \text{ N} = 1554 \text{ N}$$

Då knäckkraften är mindre än kraften för plasticering så blir den maximalt tillåtna kraften 1554 N.

Problem 2

Det maximala böjmomentet som uppkommer under punktkraften och har ett värde $M_b = -PL/4$ vilket kan inses via snitta + jämvikt. Böjmomentet (som verkar runt y-axeln) kan även beräknas från spänningsfördelningen mha jämvikt

$$M_b = \int_A \sigma z dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma z dz$$

Spänningarna i balken ges av Hooke's lag och töjningsfördelningen är linjär vilket har getts som ledning. Därför kan böjmomentet skrivas som

$$\begin{aligned} M_b &= b\kappa \left[E \int_{-h/2}^{-h/4} z^2 dz + \frac{E}{2} \int_{-h/4}^{h/4} z^2 dz + E \int_{h/4}^{h/2} z^2 dz \right] = 2b\kappa E \left[\frac{1}{2} \int_0^{h/4} z^2 + \int_{h/4}^{h/2} z^2 dz \right] \\ &= 2b\kappa E \left[\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{h^3}{64} + \frac{1}{3} \left(\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{64} \right) \right] = \frac{2b\kappa E}{3 \cdot 128} (1 + 16 - 2) = \frac{5bh^3\kappa E}{64} \end{aligned}$$

Identifiering av κ ger

$$-\frac{PL}{4} = \frac{5b\kappa E}{64} \implies \kappa = -\frac{16PL}{5bh^3E}$$

Största spänning uppkommer på undersidan av balken där både töjningen och elasticitetsmodulen är störst

$$\sigma_{max} = -\frac{E\kappa h}{2} = \frac{8PL}{5bh^2}$$

Problem 3

Ersätt stödet vid B med en reaktionskraft R_B . Bestäm R_B och P så att deformationen vid B δ_B blir 0 och deformationen vid C blir Δ .

Problemet kan delas upp i två st "konsolbalk belastad med punktkraft" vilket är fall 1 för konsolbalkar i formelsamlingen

$$\delta_B = \delta_B^{R_B} + \delta_B^P = 0$$

$$\delta_C = \delta_C^{R_B} + \delta_C^P = \Delta$$

För en punktkraft vid B så blir $\alpha = \beta = 1/2$. Deformationen vid B ges direkt av ekvationen för deformation under punktkraften

$$\delta_B^{R_B} = \frac{R_B(3L)^3}{3EI} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

För deformationen längst ut så ska $\delta(\xi < \alpha)$ användas med $\xi = 0$.

$$\delta_C^{R_B} = \frac{R_B(2L)^3}{6EI} \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2(1-0) \right] = \frac{R_B(2L)^3}{6EI} \left[\frac{6}{8} - \frac{1}{8} \right] = \frac{5R_B L^3}{6EI}$$

För en punktkraft längst ut har vi $\alpha = 0$ samt $\beta = 1$. För att beräkna deformationen vid B använder vi $\delta(\xi > \alpha)$ med $\xi = 1/2$.

$$\delta_B^P = \frac{P(2L)^3}{6EI} \left[\left(\frac{1}{2} - 0\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 2 \right] = \frac{P(2L)^3}{6EI} \left[\frac{1}{8} - \frac{12}{8} + \frac{16}{8} \right] = \frac{5PL^3}{6EI}$$

Att $\delta_C^{R_B}$ och δ_B^P blir samma är inte förvånande då problemet kan formuleras mha en styvhetsmatris $\mathbf{K}$ som kan generellt visas vara symmetrisk. Slutligen så fås nedböjningen vid C pga punktkraften P enkelt som

$$\delta_C^P = \frac{P(2L^3)}{3EI} = \frac{8PL^3}{3EI}$$

Reaktionskraften bestäms från $\delta_B = 0$

$$\delta_B = \frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{5PL^3}{6EI} = 0 \implies 2R_B + 5P = 0 \implies R_B = -\frac{5P}{2}$$

Minustecknet innebär att den är motriktad P vilket är som förväntat. Slutligen fås deformationen vid C som

$$\delta_C = \frac{5R_B L^3}{6EI} + \frac{8PL^3}{3EI} = -\frac{25PL^3}{12EI} + \frac{32PL^3}{12EI} = \frac{7PL^3}{12EI}$$

slutligen bestämmer vi P från att $\delta_C = \Delta$

$$P = \frac{12EI\Delta}{7L^3}$$

Problem 4

Spänningarna pga det inre övertrycket ges av ångpanneformlerna

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{t} = 100 \text{ MPa} \quad \sigma_{zz} = \frac{pR}{2t} = 50 \text{ MPa} \quad \sigma_{rr} \approx 0$$

Vridmomentet orsakar en skjuvspänning $\tau_{\varphi z}$ som kan antas vara konstant över tvärsnittet pga tunnväggighet

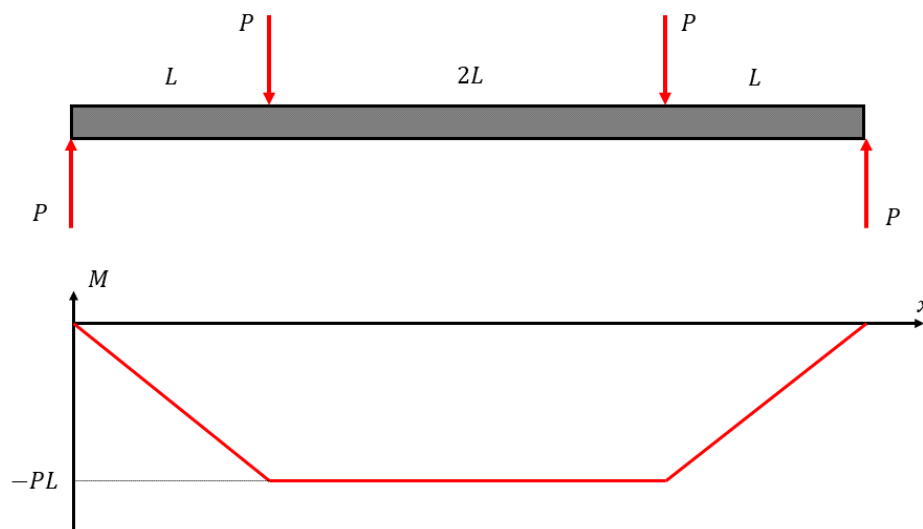
$$\tau_{\varphi z} = \frac{Mv}{W_v} \quad W_w = 2\pi R^2 t$$

vilket ger ett numeriskt värde på $\tau_{\varphi z} \approx 160 \text{ MPa}$. Slutligen får vi von Mises effektivspänning

$$\sigma_e^{vM} = \sqrt{\sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} + 3\tau_{\varphi z}^2} \approx 290 \text{ MPa}$$

Problem 5

Börja med att bestäm böjmomentet i balken mha snitta och jämvikt enligt figur nedan.



Problemet har uppenbarligen en kritisk punkt då anvisningen orsakar spänningskoncentratoner samt att inga större böjmoment finns där. Den nominella spänningen fås, exempelvis från kapitel 32, tabell 32.6 i formelsamlingen

$$\sigma_{nom} = \frac{32PL}{\pi d^3} = 199 \text{ MPa}$$

Vid anvisningen behöver man reducera pga anvisning men också pga ytfinhet. Vi börjar med anvisningsfaktorn som beräknas enligt

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

Kärlekänslighetsfaktorn q ges i sin tur från figur 25.9 i formelsamlingen med $R_m = 1000 \text{ MPa}$ och $\rho = 10 \text{ mm}$ till $q = 0.95$. Spänningskoncentrationsfaktorn K_t fås genom avläsning av tabell 32.6

i formelsamlingen med $D/d = 1.25$ samt $\rho/d = 0.125$ och blir $K_t = 1.85$. Detta ger slutligen anvisningsfaktorn $K_f = 1.8$.

De reducerade utmattningsgränserna blir då

$$\sigma_{ub}^{red} = \pm \frac{1}{1.8} 750 \text{ MPa} = \pm 417 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ubp}^{red} = 550 \cdot \frac{1}{1.8} 550 \text{ MPa} = 550 \pm 306 \text{ MPa}$$

Extrapolering till den angivna restspänningen ger då

$$\sigma_{ub}^{-350 \text{ MPa}} = 417 \text{ MPa} + \frac{417 - 306}{550} \cdot 350 \text{ MPa} = 488 \text{ MPa}$$

Slutligen kan säkerhetsfaktorn beräknas som $n = \sigma_{ub}^{-350 \text{ MPa}} / \sigma_{nom} = 2.45$

Problem 6

Säg att massan rör sig i x-led och vi sätter $x = 0$ vid den vägg där vagnen stannar. Rörelseekvationen för massan blir då

$$M\ddot{x} = T$$

När vagnen har krockat med väggen så böjs balken framåt en sträcka x och med de teckenkonventioner enligt figuren till höger fås

$$x = -\frac{TL^3}{3EI} \implies T = -\frac{3EI}{L^3} x$$

Rörelseekvationen blir alltså

$$M\ddot{x} + \frac{3EI}{L^3} x = 0$$

eller

$$\ddot{x} + \omega_e^2 x = 0$$

med

$$\omega_e^2 = \frac{3EI}{ML^3}$$

Ansätt lösning

$$x(t) = A \sin(\omega_e t) + B \cos(\omega_e t)$$

Begynnelsevillkor

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

ger

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_e} \sin(\omega_e t)$$

Maximala värdet ges när $\sin(\omega_e t) = -1$ och 1 vilket ger en till beloppet maximal tvärkraft och böjmoment på

$$T_{\max} = \frac{3EI}{L^3} \frac{v_0}{\omega_e} = v_0 \sqrt{\frac{3EIM}{L^3}} \quad M_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{3EIM}{L}}$$

