

# SK1104 Klassisk fysik

## Lösningsförslag till tentamen

Måndagen den 10 mars, 2025, 14:00-16:30

### Del A - 1p per deluppgift

**1a)** Vi börjar med att beräkna ersättningskapacitansen för de seriekopplade kondensatorerna  $C_1 = 60$  nF och  $C_2 = 30$  nF i den vänstra grenen av kretsen, vilket ger att

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_{12} = \frac{60 \cdot 30}{60 + 30} \text{ nF} = 20 \text{ nF}$$

På motsvarande sätt får vi för de seriekopplade kondensatorerna  $C_3 = 75$  nF och  $C_4 = 50$  nF i den högra grenen av kretsen att

$$C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \Rightarrow C_{34} = \frac{75 \cdot 50}{75 + 50} \text{ nF} = 30 \text{ nF}$$

Parallellkoppling av dessa båda ersättningskapacitanser ger att

$$C_e = C_{12} + C_{34} \Rightarrow C_e = 50 \text{ nF}$$

Den slutliga ersättningskapacitanser  $C_{tot}$  för hela kretsen ges av seriekoppling mellan  $C_e$  och  $C_5 = 120$  nF.

$$C_{tot} = \frac{C_e C_5}{C_e + C_5} \Rightarrow C_{tot} = \frac{50 \cdot 120}{50 + 120} \text{ nF} = 35 \text{ nF}$$

**b)** Den högsta temperatur som kan uppnås i en ugn begränsas av energiprincipen, vilken vid jämvikt kan skrivas

$$P_{utstrålad} = P_{tillförd} = V \cdot I = \frac{V^2}{R}$$

Vidare har vi att

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \Rightarrow P_{tillförd} = \frac{V^2 \cdot A}{\rho \cdot L}$$

Temperaturer i ugnen ökar när den tillförda effekten ökar, vilket betyder att följande svar är korrekta:

C: Öka trådens tvärsnittsarea,  $A$

D: Öka den pålagda spänningen,  $V$

c) Ström är förändring av laddning per tidsenhet, varför vi har att

$$i = \frac{dq}{dt} \approx \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow i = \frac{1,0}{40 \cdot 10^{-6}} \text{ A} = 25 \text{ kA}$$

## Del B - 4p per uppgift

**2 a)** Kraften mellan två laddningar ges av Coulombs lag och laddningen från laddning 2 på laddning 1 är

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

där  $r$  är avståndet mellan laddningarna och  $\hat{r}_{21}$  är en vektor som pekar från laddning 2 mot laddning 1. Inför ett koordinatsystem där  $x$ -axeln ligger åt höger i figuren, dvs ut från  $q_3$ . Låt vidare  $q_0 = 1$  pC, så att  $q_1 = 2q_0$ ,  $q_2 = -q_0$  och  $q_3 = 3q_0$ . Kraften i  $x$ -axelns riktning på vardera av laddningarna kan då skrivas:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = k \cdot \frac{-2q_0^2}{a^2}(-\hat{x}) + k \cdot \frac{6q_0^2}{4a^2}(-\hat{x}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{kq_0^2}{a^2} \hat{x}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = k \cdot \frac{-2q_0^2}{a^2} \hat{x} + k \cdot \frac{-3q_0^2}{a^2}(-\hat{x}) = 1 \cdot \frac{kq_0^2}{a^2} \hat{x}$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = k \cdot \frac{6q_0^2}{4a^2} \hat{x} + k \cdot \frac{-3q_0^2}{a^2} \hat{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{kq_0^2}{a^2}(-\hat{x})$$

Kraften är således störst på laddning  $q_3$  och den blir

$$F_3 = |\vec{F}_3| = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^{-12} \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,00500^2} \text{ N} = 0,54 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

och är riktad i den negativa  $x$ -axelns riktning, dvs från  $q_3$  mot  $q_2$ .

**b)** Längs  $y$ -axlen kommer först och främst potentialen att bli noll i  $\pm\infty$ , eftersom potentialen avtar med avståndet från laddningarna som

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dessutom kommer den att bli noll i de punkter längs med  $y$ -axeln där summan av potentialen från samtliga tre laddningar är noll. Betrakta en godtycklig punkt  $P$  länga med  $y$ -axeln. Punkten  $P$  befinner sig då på avståndet  $r = y$  från  $q_2$  och på avståndet  $r = \sqrt{a^2 + y^2}$  från laddning  $q_1$  och laddning  $q_3$ . Den totala elektriska potentialen i punkten  $P$  kan då tecknas

$$\begin{aligned} V_{tot} &= V_1 + V_2 + V_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 y} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + y^2}} = \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{1}{y} + \frac{3}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right] = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{5}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{1}{y} \right] \end{aligned}$$

Vi söker de punkter där  $V_{tot} = 0$  V, vilket inträffar när

$$5y = \sqrt{a^2 + y^2} \Rightarrow 25y^2 = a^2 + y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{a}{\sqrt{24}}$$

Insättning ger att potentialen även är noll i de båda punkterna  $y = \pm 1,02$  mm.

**3.** En solenoid är en lång rak spole, så vi börjar med att beräkna fältet i mitten av den stora spolen med  $N_s = 5000$  varv.

$$B_s = \frac{\mu_0 N_s I}{L} \Rightarrow B_s = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5000 \cdot 80,2}{0,30} \text{ T} = 1,68 \text{ T}$$

Detta fält ligger längs med solenoidens symmetriaxel. För att vrida det totala fältet med  $1,00^\circ$ , behövs det ett transversellt fält (se figur) som har storleken



$$B_t = B_s \cdot \tan \theta \Rightarrow B_t = 1,68 \cdot \tan 1,00^\circ \text{ T} = 29,3 \text{ mT}$$

Av symmetrin i problemet framgår att vardera av de båda sekundärmagneterna ger upphov till lika stora fält i punkten  $P$ . Fältet från en cirkulär slinga med  $N_t = 1000$  varv med radien  $a = 2,5$  cm, ges av

$$B = \frac{N_t \mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} B_t \Rightarrow I = \frac{B_t \cdot (x^2 + a^2)^{3/2}}{N_t \mu_0 a^2}$$

på avståndet  $x = 1,00$  cm från centrum av slingan. Insättning av värden ger att

$$I = \frac{29,3 \cdot 10^{-3} \cdot (0,010^2 + 0,025^2)^{3/2}}{1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,025^5} \text{ A} = 0,73 \text{ A}$$

4. Eftersom  $R_{IC}$  är en mycket stor resistans, kan vi med god approximation anta att strömmen genom den delen av kretsen är försumbar. Eftersom de båda kapacitanserna  $C_{par}$  och  $C$  då blir parallellkopplade, kan de ersättas av ersättningskapacitansen  $C_t = C + C_{par}$ , vilket betyder att själva antennkretsen utgörs av en  $LRC$ -krets. För att få en effektiv energiöverföring mellan kortläsaren och antennen krävs att kortläsaren arbetar vid samma frekvens som ger resonans i  $LRC$ -kretsen. Vi måste således kräva att

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC_t} - \frac{R^2}{4L^2}} \Rightarrow \omega^2 + \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC_t} \Rightarrow C_t = \frac{4L}{4\omega^2 L^2 + R^2}$$

Insättning ger oss nu att

$$C_t = \frac{4 \cdot 8,8 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot (2\pi \cdot 13,56 \cdot 10^6 \cdot 8,8 \cdot 10^{-6})^2 + 25,0^2} \text{ F} = 15,7 \text{ pF}$$

Detta betyder att kapacitansen  $C = (15,7 - 1,4) \text{ pF} = 14,3 \text{ pF}$ . Det är även värt att notera att resistansen i kretsen är liten, varför den term som innehåller  $R$  i ekvationen ovan ger en näst intill försumbar korrektion. Nu känner vi till värdet på alla komponenter i  $LRC$ -kretsen förutom  $R_{IC}$  som vi får betrakta som såpass stor att den inte nämnvärt påverkar den övriga kretsen. Den spänning som krävs för att driva den integrerade kretsen är given till  $V_{rms} = 5,0 \text{ V}$ , vilket betyder att amplituden hos den spänning som behövs för att driva kretsen är  $V_{IC} = \sqrt{2} \cdot 5,0 \text{ V}$ . Om spänningen  $V$  induceras i hela antennen, får vi genom spänningsdelning och  $j\omega$ -metoden (med komplexa spänningar) att

$$\check{V}_{IC} = \frac{Z_C}{Z_{RL} + Z_C} \cdot \check{V} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \check{V} = \frac{\check{V}}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Vi kan nu lösa ut den verkliga spänningen  $V$  ur denna ekvation genom att ta absolutbeloppet av den komplexa spänningen  $\check{V}$

$$V = |\check{V}| = \sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} \cdot \check{V}_{IC}$$

Slutligen ger insättning av värden att

$$\omega^2 LC = (2\pi \cdot 13,56 \cdot 10^6)^2 \cdot 8,8 \cdot 10^{-6} \cdot 15,7 \cdot 10^{-12} = 1,0029$$

och

$$\omega RC = 2\pi \cdot 25 \cdot 15,7 \cdot 10^{-12} = 0,0334$$

vilket ger att

$$V = \sqrt{(1 - 1,0029)^2 + (0,0334)^2} \cdot \sqrt{2} \cdot 5,0 \text{ V} = 0,24 \text{ V}$$

**Anm:** Orsaken till att det krävs en avsevärt mindre inducerad spänning än vad IC-kretsen kräver är att kretsen befinner sig nära resonansfrekvensen och då gör resonansen att spänningen över kondensatorn blir större. Ett annat sätt att se det på är att spänningen över spolen ligger i motfas mot spänningen över kondensatorn.