

Lösningsföslag till Tentamen i Modern Fysik (SH1012)
08.00-13.00, 2013-08-23, KTH, Stockholm

1. Problem:

Vid den stora acceleratoren LHC på CERN kan man låta Pb-208-atomkärnor kollidera med varandra vid höga hastigheter. Antag att en av blyatomkärnorna färdas med hastigheten $0.999c$. Massan för Pb-208 är 207.98 u. Beräkna atomkärnans totala energi, E [2 p].

För stillstående observatörer ändrar objekt vid höga hastigheter sin form. Antag att blykärnan rör sig i x -led med hastigheten ovan. Beskriv dess form (betraktat från en i labbet stillastående observatör) och ange dess (ungefärliga) absoluta mått uttryckt i fm($=10^{-15}$ m) i x -, y -, och z -led [3 p].

Lösning:

γ -faktorn blir:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.999^2}} = 22.37$$

För den totala relativistiska energin, E , har vi nu:

$$E = mc^2 = m_0 c^2 \gamma = 207.98 \cdot 931.502 \cdot 22.37 \text{ MeV} = 4.33 \cdot 10^6 \text{ MeV} = 4.33 \text{ TeV}$$

där m är den relativistiska massan, m_0 vilomassan, och där vi har använt värdet på en atomär massenehet uttryckt i enheten MeV/ c^2 .

.

Vi får längdkontraktion i x -led, men ingen förändring i y - eller z -led. Denna längdkontraktion ger x -radien: $x = r_0/\gamma = 0.0447 \cdot r_0$, där r_0 är radien för atomkärnan i vilosystemet.

Radien r_0 har värdet: $r_0 = 1.2 \cdot A^{1/3} = 1.2 \cdot 108^{1/3} = 7.11 \text{ fm}$.

I labssystemet blir alltså kärnan platt som en pannkaka med radier i (x, y, x) -led lika med (0.318, 7.11, 7.11) fm.

2. Problem:

På KTH:s reaktorfysiklab finns en neutronkälla placerad i en stor vattentank. Då neutronerna bromsats in i vattnet till nära vila absorberas de av vattnets protoner (i vätet) och på så sätt bildas isotopen deuterium (^2H). Deuteriumatomkärnan bildas i sitt grundtillstånd och den överblivna energin skickas ut i form av en gammafoton. Vilken energi (uttryckt i keV) har dessa fotoner? [5 p]

Notera: Weiszäckers formel är inte lämplig att använda i denna uppgift.

Lösning:

För att beräkna reaktionens Q -värde använder vi massan för de tre inblandade partiklarna:

$$\begin{aligned} Q &= ((m_{\text{before}} - m_{\text{after}}))c^2 = ((m_{\text{proton}} + m_{\text{neutron}}) - m_{\text{deuteron}})c^2 = \\ &= 938.280 + 939.573 - 1875.628 [\text{MeV}] = 2.225 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Varje gamma-foton får alltså energin 2225 keV.

3. Problem:

En väteatom befinner sig i sitt grundtillstånd $(n, l, m_l) = (1, 0, 0)$. Utgå ifrån formelsamlingens uttryck för väteatomens vågfunktioner.

Beräkna den mest sannolika radien, r_0 , uttryckt i a_0 . [2 p]

Beräkna väntevärdet för radien, $\langle r \rangle$, uttryckt i a_0 . [3 p]

Lösning:

Den totala vågfunktionen är:

$$\Psi_{1,0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}.$$

Sannolikshetsfördelningen, P , i radiell led får genom att multiplicera kvadraten på vågfunktionen med ett sfäriskt skal:

$$P(r) = 4\pi r^2 |\Psi_{1,0,0}|^2 = 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi} \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

Maximum av $P(r)$ får genom derivering:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= 0 \\ \frac{4}{a_0^3} \left(2r e^{-2r/a_0} - \frac{2}{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} \right) &= 0 \\ r - \frac{r^2}{a_0} &= 0 \\ r &= a_0. \end{aligned}$$

Den mest sannolika radien är alltså a_0 , dvs Bohrradien.

Väntevärdet för radien, $\langle r \rangle$, räknas ut på sedvanligt sätt:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* r \Psi dV = \\ \int_0^{\infty} r \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \right)^2 dV &= [dV = 4\pi r^2 dr] = \\ \frac{4}{a_0^3} \int_0^{\infty} r^3 e^{-2r/a_0} dr. \end{aligned}$$

Efter att ha löst integralen får vi slutligen:

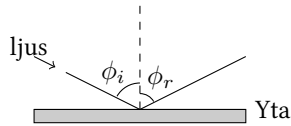
$$\langle r \rangle = \frac{3a_0}{2}.$$

4. Problem:

Röntgenstrålning med våglängden 0.24243 nm faller in mot en polonium-metallyta. Ett 1:a intensitetsmaximum uppmäts i vinkeln $\phi_r = \phi_i = 68.8^\circ$ mot ytans normal enligt figuren nedan. Vad är avståndet mellan atomplanen? [2 p]

Om man använt neutrondiffraction istället, vilken kinetisk energi (uttryckt i eV) skulle neutronerna behöva ha för att ge maximum i samma vinkel? [2 p]

Polonium har enkel kubisk kristallstruktur. Poloniumisotopen Po-209 har en atomär massa på 208.98 u. Beräkna metallens densitet. [1 p]



Lösning:

I detta fall använder vi Braggs lag, där figurens vinkel ψ_i motsvarar Braggformelns θ enligt $\theta = 90^\circ - \phi$. Vid första maximum har vi:

$$2d \sin(90^\circ - \phi) = 1 \cdot \lambda$$

Detta ger $d = 0.3352$ nm.

För att använda neutroner ska vi alltså få en våglängd på 0.24243 nm med neutronerna, enligt de Broglie; $p = h/\lambda$. Neutronernas totala energi fås genom: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_n^2 c^4}$. Deras kinetiska energi fås genom $E_k = E - m_0 c^2$

Icke-relativistiskt går också; $E_k = p^2/2m$. Insatta värden ger $E_{kin} = \text{ca } 0.0139$ eV

Med atomavståndet ovan får vi densiteten genom att beräkna massan för en kubikcentimeter Po-209.

Antalet atomer per kubikcentimeter är:

$$\frac{N}{\text{cm}^3} = (0.01/0.3352e-9)^3 = 2.6551e+22$$

Densiteten blir således:

$$\rho = m_{\text{atom}} \frac{N}{\text{cm}^3} = 208.98 \cdot 1.660566 \cdot 10^{-27} \cdot 2.6551 \cdot 10^{22} = 9.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3,$$

dvs 9.2 g/cm^3 .

5. **Problem:**

Den tekniska fysikern Eulalia är 20 år. Hon är intresserad av relativitetsteori och liv på främmande planeter. Hon har nyligen tagit emot en signal som hon tolkar som intelligent liv från en exoplanet som ligger 250 ljusår från jorden. Eulalia planerar nu att åka dit, lära känna rymdvarelserna under ett år på deras planet, och sedan åka tillbaka hela vägen och berätta för alla på jorden om sin resa. Vilken hastighet måste hennes rymdskepp ha för att hon ska hinna med detta under sin livstid? [3 p].

Hur lång tid har gått på jorden när hon kommer tillbaka? [2 p]

Lösning:

Eulalia räknar med att bli 81 år gammal, så hon har 61 år på sig, i sin referensram. Om resan i en riktning tar 30 år för henne så räcker alltså hastigheten till.

Till en början kan vi anta att hastigheten måste ligga nära c . Vi kan då approximativt anta att färden i en riktning tar ca 250 år.

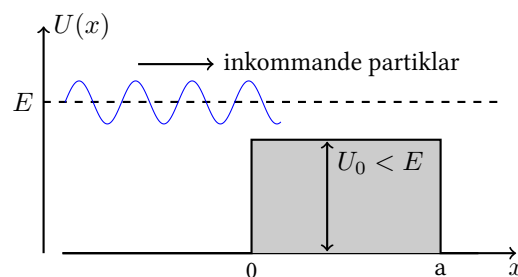
Tidsdilatation ($\Delta t = \gamma \Delta t'$) ger då en gamma-faktor på ca $\gamma = 250/30 = 8.33$. Det ger v/c på ca 0.993.

Vi se nu att vårt antagande (att v ligger nära c) var korrekt. Ett noggrannare värde för tiden på jorden blir nu: $1 + 2 \cdot 250/0.993 = 505$ år. (Man kan iterera detta flera gånger för högre precision).

6. **Problem:**

Betrakta den mot potentialbarriären inkommande partikelvågen i figuren nedan. Dela upp i lämpliga regioner och ställ med kvantmekanisk formalism upp formen på partikelvågens vågfunktion (använd först godtyckliga normaliseringskonstanter och ange om någon konstant är lika med 0. Ställ även upp alla relevanta randvillkor som gäller för vågfunktionen i detta fall. [2 p]

Härled, med utgångspunkt från ovanstående formalism, formelbladets uttryck för reflektionskoefficienten, R , dvs för sannolikheten att en inkommande partikel reflekteras. Visa alla steg i härledningen tydligt. [3 p]



Lösning:

Från föreläsningssammanfattningarna har vi följande härledning:

Vi delar upp problemet i tre regioner: $I : x < 0$, $II : 0 < x < a$ och $III : x > a$. I detta fall har vi för region I:

$$\psi_{x < 0}(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

För region II skriver vi upp den generella lösningen:

$$\psi_{0 < x < a}(x) = Ce^{+ik'x} + De^{-ik'x} \quad k' = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}$$

Vi har med D -termen (som motsvarar en våg som rör sig mot vänster i figuren) eftersom vi nu kan få reflektion även vid $x = a$, där $U(x)$ faller från U_0 till 0. För region III har vi bara en våg som går från vänster till höger i figuren, med samma energi som den inkommande vågen:

$$\psi_{x>a}(x) = F e^{+ikx} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Vi får nu två randvillkor vid $x = 0$ och ytterligare två vid $x = a$:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= Ae^0 + Be^0 = Ce^0 + De^0 && \implies A + B = C + D \\ \frac{d\psi(0)}{dx} &= ikAe^0 - ikBe^0 = ik'Ce^0 - ik'De^0 && \implies k(A - B) = k'(C - D) \\ \psi(a) &= Ce^{ik'a} + De^{ik'a} = Fe^{ika} \\ \frac{d\psi(a)}{dx} &= ik'(Ce^{ik'a} - De^{ik'a}) = ikFe^{ika} \end{aligned}$$

Genom att lösa ut konstanterna (B som funktion av A) ur detta ekvationssystem (algebran visas inte här) får vi:

$$R = \frac{B^* B}{A^* A} = \dots = \frac{\sin^2(k'a)}{\sin^2(k'a) + 4 \frac{k'^2 k^2}{(k^2 - k'^2)^2}} = \frac{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right]}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)}$$

7. Problem:

En cesiumatom emitterar en foton (karaktäristisk Röntgenstrålning) motsvarande en elektronövergång från L-skalet ($n = 2$) till K-skalet ($n = 1$). Beräkna energin för denna foton. (Vi kan förenklat anta i detta fall att de olika elektronerna inte påverkar varandra) [3 p]

Karaktäristisk röntgenstrålning kan bl.a. uppstå som en direkt följd av s.k. *inre konversion*. Som ett exempel sönderfaller ett exiterat tillstånd (662 keV över grundtillståndet) i isotopen/atomkärnan ^{137}Cs med inre konversion. Förklara vad inre konversion innebär och exemplifiera med detta sönderfall i ^{137}Cs för att beskriva förloppet. Alla inblandade partiklar ska redovisas. [2 p]

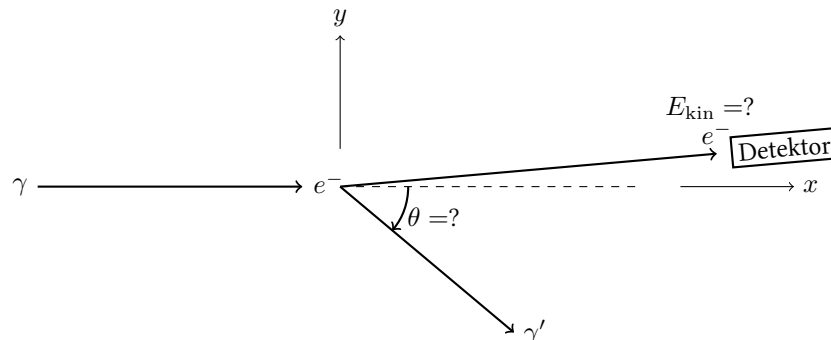
Lösning:

Vi approximerar och betraktar här cesiumatomen som en vätelik atom med $Z = 55$. Formelsamlingen anger energierna E_n för vätelika atomer: $E_n = -Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV} / n^2$. Energiskillnaden mellan $n = 2$ och $n = 1$ blir då:
 $\Delta E = -Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV} \cdot (1/2^2 - 1/1^2) = \frac{3}{4} \cdot 55^2 \cdot 13.6 = 30.9 \text{ keV}$.
 Detta är således energin på de emitterade fotonerna.

Vid inre konversion så går en atomkärna från ett exiterat tillstånd till ett lägre liggande tillstånd (tex grundtillståndet). Men vid denna process så skickas ingen gamma-foton ut som annars är regel. Istället så överförs energivinsten från sönderfallet till en av de atomära elektronerna som omger kärnan. Denna elektron skickas ut från atomen (med en kinetisk energin motsvarande energiskillnaden ovan, här 662 keV, minus dess bindningsenergi). Detta skapar ett elektronhål (ofta i K-skalet) och när detta hål fylls så skickas karakteristisk röntgenstrålning ut som i fallet ovan.

8. Problem:

Comptonspridning; En inkommande gammafoton som rör sig i x -riktningen (se figur) med energin 1173 keV sprids mot en elektron i origo $(x,y)=(0,0)$. Elektronen träffar en detektor i punkten $(x,y)=(10 \text{ cm}, 1 \text{ cm})$. Beräkna den detekterade elektronens kinetiska energi, E_{kin} , samt den spridda fotonens riktning (uttryckt som vinkeln θ mot den inkommande fotonens riktningsvektor. Gör en egen figur så riktningarna framgår tydligt). [5 p]



Lösning:

Om vi hittar ett samband mellan vinkeln för γ' , θ , och vinkeln för elektronen, ϕ , så har vi löst svårigheten i detta problem.

Vi bevarar rörelsemängden i x - och y -led, så vi kan skriva:

$$\begin{aligned} p_\gamma &= p_{\gamma'} \cos \theta + p_e \cos \phi \\ p_e \cos \phi &= p_\gamma - p_{\gamma'} \cos \theta \\ p_e \sin \phi &= p_{\gamma'} \sin \theta \end{aligned}$$

Detta ger:

$$\begin{aligned} \frac{p_e \sin \phi}{p_e \cos \phi} &= \frac{p_{\gamma'} \sin \theta}{\frac{E_\gamma}{c} - p_{\gamma'} \cos \theta} \\ \tan \phi &= \frac{1}{\frac{E_\gamma}{c \cdot p_{\gamma'} \sin \theta} - \cot \theta} = \frac{1}{\frac{\lambda'}{\lambda \sin \theta} - \cot \theta} = \frac{\lambda \sin \theta}{\lambda' - \lambda \cos \theta} = \\ &= \frac{\lambda \sin \theta}{(\lambda - \lambda \cos \theta) + (\lambda' - \lambda)} = \left[\text{formelsamlingen ger : } \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \right] = \\ &= \frac{\lambda \sin \theta}{\lambda(1 - \cos \theta) + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta) + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos \theta)}. \end{aligned}$$

Till slut kan vi förenkla sambandet mellan ϕ och θ :

$$\tan \phi \left(1 + \frac{E_\gamma}{mc^2} \right) = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}.$$

Elektronens vilomassa är 511 keV/ c^2 , så i vårt problem har vi $E_\gamma/mc^2 = 1173/511$.

Från texten/figuren har vi: $\tan \phi = 1/10$, så vi får:

$$\theta = 2 \cdot \text{arccot}(0.1 \cdot (1 + 1173/511)) = 143.5^\circ$$

Formelsamlingen ger med insatta värden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} &= \frac{1 - \cos \theta}{mc^2} \\ E'_\gamma &= \frac{1}{\frac{1 - \cos \theta}{mc^2} + \frac{1}{E_\gamma}} = 228.15 \text{ keV}. \end{aligned}$$

Eftersom energin konserveras har vi:

$$E_e = 1173 - 228.15 = 944.85 \text{ keV}.$$

Vi ser att elektronens kinetiska energin är 945 keV.