

TENTAMEN, DEL 2
SF1544
NUMERISKA METODER, GRUNDKURS
Onsdag 13 mars 2024 kl 14.00-17.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd.

Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. Nedanstående differentialekvation beskriver positionen $y(t)$ vid tiden t för ena änden av en dämpad icke-linjär fjäder,

$$\begin{aligned}y''(t) &= -ay^3(t) - by'(t) + c \sin(\omega t), \\y(0) &= 0 \\y'(0) &= 1\end{aligned}$$

där a, b, c och ω är givna positiva konstanter.

- (3 p) **a)** Skriv ekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Systemet ska skrivas på formen

$$\mathbf{u}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

Det ska klart framgå vad $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}(t, \mathbf{u})$ och $\mathbf{u}_0$ är.

- (4 p) **b)** Antag att $a = b = c = 1$ och $\omega = 10$. Formulera framåt Euler för systemet i **a)**. Använd sedan framåt Euler med valfri steglängd för att beräkna en approximation till $y(t)$ och $y'(t)$ vid tiden $t = 0.1$.
- (6 p) **c)** Beskriv en algoritm, gärna i form av ett Matlabprogram, som beräknar en approximation av $y(t)$ och plottar den på intervallet $0 \leq t \leq 10$. Du kan använda samma steglängd som du använde i **b)**.

P2. Följande randvärdesproblem

$$u''(x) = -u'(x) + 3u(x) + \alpha u^3(x) + x^2 \quad u(0) = 0 \quad u(1) = 1$$

är givet.

- (6 p) **a)** Sätt $\alpha = 0$ och formulera finita differensmetoden för problemet. Dela in intervallet $0 \leq x \leq 1$ i 4 delintervall och ställ upp det linjära ekvationssystem $A\vec{u} = \vec{b}$ som måste lösas. Inför lämpliga beteckningar för de variabler du använder och härled uttryck för alla element i matrisen A och i högerledet $\vec{b}$. Du behöver inte lösa ekvationssystemet men var noga med att definiera alla variabler du använder.

- (3 p) **b)** Om antal delintervall, N , är stort kommer matrisen A att vara en gles matris. Antag att det tar ca 20 sekunder att lösa systemet $A\vec{u} = \vec{b}$ när $N = 15000$. Ungefär hur lång tid tar det att lösa systemet när $N = 45000$? Motivera ditt svar.
- (4 p) **c)** Om $\alpha \neq 0$ får vi ett olinjärt randvärdesproblem att lösa. Sätt $\alpha = 10$ och dela in intervallet $0 \leq x \leq 1$ i 4 delintervall och formulera det olinjära ekvationssystem $F(\vec{u})$ som ska lösas. Alla element i $F(\vec{u})$ ska specificeras.
- (7 p) **d)** Formulera Newtons metod för problemet i **c)**. Alla element i matriser och vektorer som används ska specificeras.

P3. Följande tabell anger värden för en funktion $y = f(x)$ i ett antal ekvidistanta värden på x på intervallet $[0, 1]$:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	0	0.24	0.46	0.68	0.87

Vi vill beräkna en approximation till derivatan i intervallets vänstra ändpunkt, dvs $f'(0)$.

- (3 p) **a)** Ange en differensformel med noggrannhetsordning 1 för beräkning av $f'(0)$. Beräkna två approximationer till $f'(0)$ genom att tillämpa formeln på värdena i tabellen. Använd steglängderna $h = 0.25$ och $h = 0.5$.
- (3 p) **b)** För att få högre noggrannhetsordning kan man alternativt använda differensformeln
- $$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} \quad (1)$$
- Använd denna formel för att beräkna $f'(0)$ med användning av värdena i tabellen. Använd steglängderna $h = 0.25$ och $h = 0.5$.
- (3 p) **c)** Antag att man vet det exakta svaret, $f'(0) = 1.01$. Beräkna felen för de två approximativa värdena du räknat fram i **a)**. Verifiera att differensformeln i **a)** har noggrannhetsordning 1.
- (3 p) **d)** Gör samma sak som i **c)** men för värdena du räknat fram i **b)** och avgör vilken noggrannhetsordning formeln (1) har.
- (5 p) **e)** Använd Taylorutveckling för att bestämma noggrannhetsordningen för formeln (1).