

# Lösningar till Tentamen i Modern Fysik (SH1014)

## 14.00-19.00, 2021-04-09, KTH, Stockholm

**Examinator/lärare:** Pär Olsson (073-7650538)

**Lärare:** Torbjörn Bäck (073-7650590)

**Tillåtna hjälpmedel:** miniräknare.

**Formelsamling** (uppdaterad för denna tentamen) och **periodiska systemet** var inkluderade i filen med denna tentamenslydelse.

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng. Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

### 1. Problem:

Fysikern Elsa vet att neutroner som detekteras vid jordytan vanligtvis har frigjorts i samband med kärnreaktioner i Jordens atmosfär där bl.a. kosmiska högenergetiska protoner kolliderar med luftens atomkärnor (syre och kväve främst). Men Elsa funderar ändå på om en liten andel av neutronerna skulle kunna komma från Solen, (som ju som bekant ligger  $1.496 \cdot 10^8$  km från Jorden). Elsa vet att fria neutroner har en halveringstid på 10.6 minuter. Hennes hypotes är att neutroner som frigörs vid Solen kan ha så pass hög kinetisk energi så att de hinner fram till Jorden innan de sönderfaller.

Vilken kinetisk energi, uttryckt i eV, måste Sol-neutronerna ha för att hälften av dem ska hinna fram till Jorden innan de sönderfaller? [5 p]

**Lösning:** Vi betecknar (det kända) avståndet Jorden-Solen:  $d$  och neutronens halveringstid:  $t$ . Vi söker först hastigheten  $v$ , dvs den relativa hastigheten mellan neutronen och Jorden. I neutronens eget inertialsystem så närmar sig alltså Jorden med hastigheten  $v$ , hälften av neutronerna sönderfaller i samma system efter tiden  $t$ , och avståndet från Solen (neutronens startpunkt) och Jorden är  $d' = d/\gamma$ . Vi har alltså:

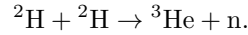
$$v = \frac{d'}{t} = \frac{d}{t\gamma} = \frac{d\sqrt{1-v^2/c^2}}{t}.$$

Efter lite algebra så löser vi ut hastigheten, och sedan neutronens kinetiska energi (i Jordens inertialsystem):

$$\begin{aligned}\frac{v}{c} &= \sqrt{\frac{1}{(\frac{ct}{d})^2 + 1}} = 0.6173 \\ \gamma &= 1.2711 \\ E_k &= m_n c^2 (\gamma - 1) = 939.573 \cdot 0.2711 = 254.7 \text{ MeV}.\end{aligned}$$

Hälften av neutronerna kommer fram om de har en rörelseenergi på 255 MeV.

2. **Problem:** Elsa funderar vidare över vilka slags processer i Solen som skulle kunna producera/frigöra neutroner, och vilken kinetisk energi som neutronerna skulle kunna få av dessa reaktioner. Hon funderar först på fusion som är en möjlig källa till neutroner. För att fusion ska ske måste kärnorna ha tillräckligt hög energi för att tunnla och övervinna Coulombrepulsionen, men det bortser vi från i denna uppgift. Solen har flera olika isotoper av väte och helium och en möjlig fusionsreaktion är denna:



- a) Beräkna  $Q$ -värdet för denna reaktion. [3 p]  
b) Beräkna den kinetiska energin för neutronen. [2 p]

**Lösning:** Reaktionens  $Q$ -värde ges av förändringen i viloenenergi:

$$\begin{aligned} Q &= \Delta mc^2 = (2 \cdot M(^2\text{H}) - M(^3\text{He}) - m_n)c^2 = \\ &= (2 \cdot 2.014101 - 3.016029 - 1.0866501) \cdot 931.502 = 3.27 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

där vi använt atommassor för att antalet elektroner skulle bevaras i reaktionen.

Neutronens kinetiska energi fås av följande samband (som enkelt kan härledas m.h.a. samtidigt bevarande av klassisk rörelseenergi och rörelsemängd):

$$E_n = \frac{Q}{1 + \frac{m_a}{m_b}} = \frac{Q}{1 + \frac{1}{3}} = 2.45 \text{ MeV}.$$

Förhållandet mellan massorna för neutronen och He3-kärnan ligger mycket nära 1/3, så vi har förenklat och använt detta bråk här.

### 3. Problem:

Kärnfysikern Laban använder en högaktiv gamma-källa (Cs-137) som skickar ut fotoner med energin 662 keV. För att undvika att gammastrålningen av misstag träffar honom så har Laban byggt ett strålskydd av tjock betong som absorberar strålningen. Men i betongen finns ett slags dubbelt L-formad öppning genom vilken han kan placera olika prover som han vill bestråla.

Laban vet att strålningen inte kan träffa honom direkt, men inser att om en foton Comptonsprids två gånger (båda gångerna i 90 graders vinkel) så kan den träffa honom. Hjälp Laban räkna ut vilken energi fotonerna som träffar honom har. Ange svaret i keV. [5 p]

**Lösning:** Vi använder formeln för Comptonspridning:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2}.$$

För spridning i 90 graders vinkel så har vi  $\cos\theta = 0$ :

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2}.$$

Vi löser ut energin för den spridda gammafotonen:

$$E' = \frac{1}{\frac{1}{m_e c^2} + \frac{1}{E}}$$

Vi kan, om vi vill, räkna ut denna energi efter en spridning:  $E' = 288 \text{ keV}$ . För att få ett uttryck för energin  $E''$ , dvs den dubbelt spridda fotonens energi så kan vi ersätta  $E$  i uttrycket ovan med högerledet i samma uttryck. Detta ger inom kort:

$$E'' = \frac{1}{\frac{2}{m_e c^2} + \frac{1}{E}} = 184 \text{ keV}$$

Vi noterar att fotonenergin är avsevärt lägre efter två spridningshändelser. Viktigare från ett strålskyddsperspektiv är dock att det helt enkelt är relativt osannolikt med två spridningar i 90 grader efter varandra på detta sätt. På grund av detta så blir strålningens *intensitet* relativt liten där Laban står.

#### 4. Problem:

När en gammafoton med energin  $E_\gamma$  emitteras från en atomkärna med vilomassan  $m_0$  så får, pga rekyl, atomkärnan en viss hastighet i motsatt riktning (vi antar här att atomkärnan är i vila före gammasönderfallet och att den är fri att röra sig).

**a)** Härled ett uttryck för hur  $E_k$ , dvs atomkärnans kinetiska (rekyl-)energi, beror av  $E_\gamma$  och  $m_0$ . För att förenkla så antar vi att  $E_k \ll E_\gamma \ll m_0 c^2$ , vilket är rimligt för typiska gammasönderfall. [3 p]

**b)** Beräkna  $E_k$  (i eV) och hastigheten (i m/s) som atomkärnan Fe-57 får då den skickar ut en gammafoton med energin 14.4 keV. [2 p]

**Lösning:** Från de givna villkoren så ser vi att vi kan betrakta atomkärnans rörelse (kinetisk energi och rörelsemängd) med klassisk fysik.

Fotonens rörelsemängd är  $p = E_\gamma/c$ . Efter att fotonen emitterats så får atomkärnan den kinetiska rekylhastigheten  $v$ . Bevarandet av rörelsemängd ger nu:

$$p = m_0 v = \frac{E_\gamma}{c}$$
$$E_k = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{E_\gamma^2}{2m_0 c^2}.$$

Vi kan nu använda det härledda uttrycket för exemplet **b)**. Vi använder hela atommassan för Fe-57:

$$E_k = \frac{E_\gamma^2}{2m_0 c^2} = \frac{0.0144^2}{2 \cdot 56.935393 \cdot 931.502} = 1.95 \cdot 10^{-9} \text{ MeV} = 1.95 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

Vi noterar att denna rekylenergi är mycket liten i förhållande till gammafotonens energi, och även liten i förhållande till t.ex. typiska jonisationsenergier för atomer. I de flesta experimentella situationer så får atomkärnans rekylenergin vid gammasönderfall ingen betydelse.

För att få hastigheten på den rekylrande atomkärnan så använder vi klassiska formler:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$
$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.95 \cdot 10^{-3} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}{56.935393 \cdot 1.660566 \cdot 10^{-27}}} = 81.4 \text{ m/s}.$$

Vi ser att atomkärnans rörelseenergi motsvarar en ganska beskedlig hastighet.

#### 5. Problem:

En väteatom i sitt grundtillstånd blir exciterad av en foton med frekvens  $2.47 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ .

**a)** Bestäm vilket tillstånd väteatomen hamnar i, specificera alla relevanta kvanttal. [2 p]

**b)** Bestäm, för det exciterade tillståndet, det radiella väntevärdet för elektronen. [3 p]

Följande integral kan vara användbar:  $\int_0^\infty x^m e^{-bx} dx = \frac{m!}{b^{m+1}}$

**Lösning:** a) Väteatomen blir exciterad av en foton med energi  $E = h\nu = 10.2 \text{ eV}$ . Energinivåerna som väteatomen kan ha ges av kvantisering villkoret  $E_n = -\frac{13.6[\text{eV}]}{n^2}$  och vi vet att vi går från grundtillståndet, alltså att  $h\nu = -13.6 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{1^2} \right)$ . Vi kan bryta ut  $n$  och får

$$n = 1/\sqrt{1 - \frac{h\nu}{13.6}} = 2.01.$$

Det är alltså det första exciterade tillståndet som aktiveras, med  $n = 2$ . Eftersom övergången orsakades av att en foton absorberats och fotonen har spinn-1, så måste även  $l$ -kvanttalet (banmomentet) ändras med 1 från grundtillståndets  $l = 0$  till  $l = 1$ . Övriga kvanttal kan vi inte bestämma. Vi har alltså tillståndet  $n = 2, l = 1$ , eller 2p-tillståndet i spektroskopisk notation.

b) Vi söker väntevärdet för radien  $\bar{r}$ . Detta definieras genom integralen  $\bar{r} = \int_0^\infty \Psi^* \hat{r} \Psi dV$  vilket här kan förenklas till att behandla endast den radiella delen av vågfunktionen,  $R_{21}$ . De radiella och vinkelberoende delarna av vågfunktionen är separat normerade. Om vi använder enbart den radiella

delen blir väntevärdet

$$\bar{r} = \int_0^\infty R_{21} r R_{21} dV = \int_0^\infty r R_{21}^2 r^2 dr = \int_0^\infty r^3 R_{21}^2 dr$$

där  $R_{21} = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{\sqrt{3}a_0} e^{-r/2a_0}$ . Detta leder till

$$\bar{r} = \frac{1}{24a_0^5} \int_0^\infty r^5 e^{-r/a_0} dr = \frac{5!a_0^6}{24a_0^5} = 5a_0$$

Man kan givetvis välja att integrera över de vinkelberoende delarna med men det är då viktigt att man sätter volymselementet korrekt ( $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ ) samt att man använder hela vågfunktionen  $\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^{ml}(\theta, \phi)$  i integralen. Eftersom vi integrerar ut vinkelberoendet så tillför det dock bara komplexitet att göra på det sättet här.

6. **Problem:** Robin har läst teknisk fysik och vet att man kan tillverka bildskärmar med mycket fin färgåtergivning och kontrast med hjälp av kvantprickar (QLED). Vi antar förenklat att en kvantprick kan approximeras av en oändlig endimensionell lådpotential. Robin vill tillverka tre storlekar på kvantprickarna så att de kan emittera ljus som är rött, grönt och blått. Det synliga spektrumet ligger mellan 380 och 750 nm. Prickarna kan sedan aktiveras genom elektrisk excitation så att de sedan de-exciterar från sina respektive  $n = 2$  till  $n = 1$ -tillstånd och sänder ut ljus.

Avgör hur stora de tre kvantprickarna behöver vara för att kunna sända ut rött, grönt och blått ljus. [5 p]

**Lösning:** Kvantprickarna innehåller en bunden valenselektron var genom t.ex. dopning. Vi kan använda den oändliga potentialbrunnen i en dimension (förenklat) och den ger oss kvantiseringsvillkoret för energin:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$$

där  $a$  är storleken på kvantpricken (i en dimension). Övergång från  $n = 2$  till  $n = 1$  ger en energiskillnad på

$$\Delta E = (2^2 - 1^2) \frac{h^2}{8ma^2} = \frac{3h^2}{8ma^2}$$

Detta ger upphov till ljus med energi  $E = \frac{hc}{\lambda}$ . Alltså blir våglängden  $\lambda = \frac{8mca^2}{3h}$ .

Vi söker dock storleken för tre uppskattade våglängder och kan istället skriva

$$a_f = \sqrt{\frac{3h\lambda_f}{8mc}}$$

för  $f$  = röd, grön, blå.

Vi vet att det synliga spektrumet ligger mellan 380 nm och 750 nm samt att färgerna går från violett till rött. Blått är därför en bit in från den högenergetiska kanten, vid ca 400 nm. Grönt är nära mitten, ca 550 nm och rött är vid den lågenergetiska kanten, ca 750 nm.

Nu kan vi ta fram storleken på de tre kvantprickarna som blir:

röd (750 nm):  $a_r = 8.3 \text{ Å}$

grön (550 nm):  $a_g = 7.1 \text{ Å}$

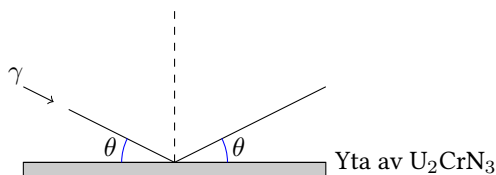
blå (400 nm):  $a_b = 6.0 \text{ Å}$

7. **Problem:** Doktoranden Julia vill bestämma gitterparametern på den nya förening av uran, krom och kväve som hon har framställt i labbet. Hon använder ett röntgenrör i vilket Na-atomer de-exciterar från  $n = 2$  till  $n = 1$  tillståndet. Antag att Na-atomerna beskrivs väl som väte-liknande för dessa tillstånd.

a) Bestäm våglängden på röntgenfotonerna som skickas ut. [2 p]

Hon använder sedan dessa fotoner i en diffraktometer där Braggspridningen har sitt första maximum vid  $76^\circ$  spridningsvinkel  $\theta$  enligt figur nedan.

b) Vad är gitterparametern för föreningen hon har skapat? [3 p]



**Lösning:** a) Våglängden på de utsända fotonerna bestäms genom att räkna ut skillnaden mellan första exciterade tillstånd och grundtillståndet för den högt joniserade Na-atomerna (som bara har en elektron här). Vi använder kvantisering villkoret för väte-liknande atomer:

$E_n = -13.6 \frac{Z^2}{n^2} [eV]$  Våglängden för en foton ges av dess energi  $\lambda = \frac{hc}{E}$ , där energin är skillnaden mellan  $E_2$  och  $E_1$ . Då blir  $\lambda = hc / (13.6 Z^2 (1 - 1/4)) = 1.01 \text{ nm}$

b) Gitterparametern kan vi ta fram genom Braggs lag:  $n\lambda = 2d \sin(\theta)$

För första maxima är  $n = 1$  och vi får fram gitterparametern som  $d = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta)} = 5.18 \text{ Å}$ .

8. **Problem:** Assar funderar på vad det är som gör koldioxid till en så effektiv växthusgas och har därför mätt upp några av molekylens egenskaper. Han vet att molekyler kan absorbera strålning genom att t.ex. vibrationsmoder exciteras och han mäter upp fjäderkonstanten för böjning till 115 N/m samt för asymmetrisk sträckning till 2230 N/m för  $\text{CO}_2$ . Han antar att de effektiva massorna för de två moderna kommer skilja sig lite eftersom sträckningen domineras av en fjäder mellan C och O, medan böjning bestäms av två fjädrar, så att sträckningens effektiva massa liknar den hos en diatomär CO-molekyl och böjningen istället tar uttrycket  $\mu_{\text{CO}_2}^{\text{bend}} = \frac{m_O m_C}{2m_O + m_C}$ .

a) Bestäm våglängden på de fotoner som absorberas av de två vibrationsövergångarna i koldioxid (böjning och asymmetrisk sträckning). [2 p]

Hjälp Assar avgöra vilken av dessa som gör koldioxid till en så viktig växthusgas genom att bestämma hur Jordens emissionsspektrum ser ut. Den våglängd som ger maximal spektralradians i spektrumet kan tas fram genom Wiens förskjutningslag. Skissa upp formen på Jordens svartkroppsspektrum genom att bestämma spektralradiansens toppvärde samt minst två värden på varje sida om denna.

b) Utifrån denna skiss, avgör vilken av vibrationsmodern det är som har störst påverkan på växthuseffekten. [3 p]

**Lösning:** a) Våglängden på de fotoner som absorberas i övergångarna bestäms av kvantisering villkoret för vibrationer:

$$E_V = \left(V + \frac{1}{2}\right) \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

För en övergång från grundtillståndet,  $V = 0$ , till första exciterade tillstånd,  $V = 1$ , blir energiskillnaden

$$\Delta E_V = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Fotonens energi ges av  $E = hc/\lambda$  och vi kan därför bestämma våglängden som absorberas av en viss övergångsmod som

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

vilket alltså kommer bero på modens fjäderkonstant  $k$  och dess effektiva massa  $\mu$ . För böjning i  $\text{CO}_2$  får vi

$$\lambda_b = 2\pi c \sqrt{\frac{\mu_b}{k_b}} = 2\pi c \sqrt{\frac{m_C m_O}{(2m_O + m_C)k_b}} = 14.99 \mu\text{m}$$

För asymmetrisk sträckning får vi

$$\lambda_{as} = 2\pi c \sqrt{\frac{\mu_{as}}{k_{as}}} = 2\pi c \sqrt{\frac{m_C m_O}{(m_O + m_C)k_{as}}} = 4.26 \mu\text{m}$$

b) Planks strålningslag ger oss utseendet på emissionen från jordytan. Växthuseffekten är baserad på att absorption av strålning av molekyler i atmosfären är mer effektiv för emissionspektrumet (för jordens relativt låga medeltemperatur om ca 290 K) än det är i det infallande solspektrumet (som ges av solens höga temperatur om ca 6000 K).

Maximum på jordens emissionspektrum kan tas fram ur Wiens förskjutningslag som ger

$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} [\text{mK}]}{T} = 10 \mu\text{m}$ . Vi ser redan här att böjningsmodens våglängd ligger närmare maximum än vad den asymmetriska sträckningen gör. Vi vet även att Planckkurvan faller av snabbare till vänster om maximum än den gör till höger. Vi kan verifiera detta genom att räkna ut spektralradiansen för de två moderna samt för kurvans topp. Om vi använder Plancks strålningslag i sin våglängdsformulering så får vi

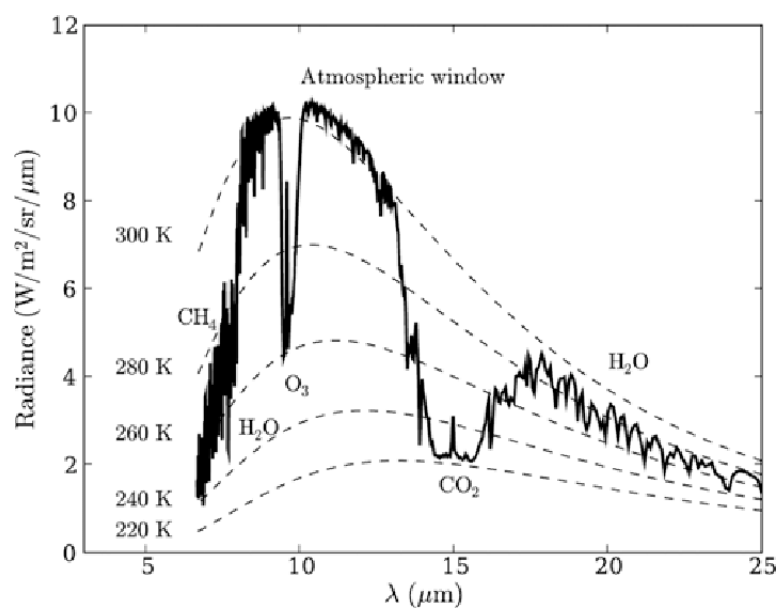
$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT} - 1} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \frac{1}{\text{sr}} \right]$$

I detta stoppar vi in de tre våglängderna och temperaturen 290 K. Detta ger oss

$$\begin{aligned} I_{as}(4.26 \mu\text{m}, 290\text{K}) &= 0.2 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \frac{1}{\text{sr}} \right] \\ I_{\max}(9.99 \mu\text{m}, 290\text{K}) &= 2.3 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \frac{1}{\text{sr}} \right] \\ I_b(15.0 \mu\text{m}, 290\text{K}) &= 1.6 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \frac{1}{\text{sr}} \right] \end{aligned}$$

Det är tydligt att böjningsmoden bidrar starkast till att hindra jordens strålning att slippa ut atmosfären och ger därför störst bidrag till växthuseffekten.

För att jämföra grafiskt visar vi i figuren nedan hur jordens svartkroppsspektrum, samt dess atmosfärfärdverkade emission ser ut.



Figur 1: Jordens utstrålning (Sportisse-2010) samt svartkroppsstrålningskurvor från 220-300 K. Notera den tydliga effekten av  $\text{CO}_2$  runt 15  $\mu\text{m}$ .