

Lösningar till Tentamen i Modern Fysik

SH1014 och SH1012

08.00-13.00, 2022-01-10, KTH, Stockholm

1. Problem:

En övergång som ofta används inom astronomin är den så kallade H-alfa-övergången i väte som uppkommer då atomen de-exciterar från $n=3$ till $n=2$.

a) Beräkna våglängden för fotoner som sänds ut av denna övergång. [1 p].

När man på jorden observerar H-alfa-övergången i ljus som kommer från galaxen NGC 4151, eller *Saurons öga* som den populärt kallas, så uppmäts dess våglängd till 658 nm.

b) Vad har *Saurons öga* för hastighet relativt jorden? [2 p].

c) Hur fort skulle en avlägsen galax behöva färdas för att H-alfa-övergången inte längre skulle vara observerbar på jorden i det synliga spektrumet (anta en rimlig gräns)? [2 p]

Lösning:

a) Vätets energinivåer beskrivs av:

$$E_n = \frac{-13.6 \text{ [eV]}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

vilket ger, för övergången $n = 3 \rightarrow n = 2$:

$$E_{\text{foton}} = -13.6 \text{ [eV]} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 1.889 \text{ [eV]}$$
$$\lambda = \frac{hc}{E_{\text{foton}}} = \frac{4.1357 \cdot 10^{-15}}{1.889 \cdot 2.9979 \cdot 10^8} = 656.4 \text{ [nm]}.$$

b) Eftersom våglängden som observeras från Jorden (658 nm) är längre (rödförskjuten) iförhållande till den från galaxens systems utskickade våglängden, så kan vi sluta oss till att galaxen rör sig *från* Jorden. Vi använder följande formel (vi har satt $\theta = 0$) från formelbladet:

$$f = \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c})}.$$

Med sambandet $f = c/\lambda$ så får vi $f/f_0 = 656.4/658 = 0.9976$, vilket ger:

$$f/f_0 = \frac{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 + (\frac{v}{c})}$$
$$\frac{v}{c} = \frac{1 - (f/f_0)^2}{1 + (f/f_0)^2} = \frac{1 - 0.9976^2}{1 + 0.9976^2} = 2.4346 \cdot 10^{-3}.$$
$$v = 730 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}.$$

Galaxen rör sig alltså från Jorden med hastigheten 730 km per sekund.

c) Den längsta våglängd som våra ögon kan uppfatta ligger kring 750 nm, vilket motsvarar en frekvens på. I detta fall så får vi alltså, enligt ovan: $f/f_0 = 656.4/750 = 0.8752$. Vi får i detta fall följande hastighet (på galaxen), betraktat från Jorden:

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - (f/f_0)^2}{1 + (f/f_0)^2} = \frac{1 - 0.8752^2}{1 + 0.8752^2} = 0.132$$
$$v = 3.97 \cdot 10^7 \text{ [m/s]}.$$

Gränsen, för vilken vi inte längre kan se galaxens H-alfa-linje, inträffar alltså då den rör sig med $0.13c = 39.7$ miljoner meter per sekund, från Jorden.

2. Problem:

En partikel med massan m befinner sig i en endimensionell potential, $U(x)$. Partikelns vågfunktion kan skrivas:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-ax} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A . [2 p]
- b) Bestäm partikelns energi E . [1 p]
- c) Bestäm potentialen U då $x > 0$. [1 p]
- d) Bestäm potentialen U då $x < 0$. [1 p]

Följande integral kan vara användbar: $\int_0^\infty r^m e^{-br} dr = \frac{m!}{b^{m+1}}$.

Lösning:

a) Sannolikheten för att hitta partikeln i intervallet $[0, \infty]$ är 1. Vi får:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi^2(x) dx &= A^2 \int_0^\infty x^4 e^{-2ax} dx = A^2 \frac{4!}{(2a)^{4+1}} = A^2 \frac{24}{32a^5} = A^2 \frac{3}{4a^5} = 1 \\ A &= \frac{2a^{5/2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

b) Som förberedelse så ta vi fram andraderivatans av vågfunktionen (positiva x):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \frac{d}{dx} (Ax^2 e^{-ax}) = A(2xe^{-ax} - ax^2 e^{-ax}) \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= A \frac{d}{dx} (2xe^{-ax} - ax^2 e^{-ax}) = \\ &= A(2e^{-ax} - 2axe^{-ax} - 2axe^{-ax} + a^2 x^2 e^{-ax}) = Ae^{-ax}(2 - 4ax + a^2 x^2) \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \psi(x) \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} + a^2 \right). \end{aligned}$$

Nu skriver vi upp Schrödingerekvationen och sätter in vågfunktionen och dess andraderivata:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x) \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} + a^2 \right) + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} + a^2 \right) + U(x) &= E \end{aligned}$$

Vi kan nu identifiera konstanta termer i vänsterledet för att få energin, E :

$$E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}$$

c) På motsvarande sätt som ovan så identifierar vi termer som beror av x med potentialen och får då potentialen $U(x)$:

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} \right)$$

d) Eftersom $\psi(x) = 0$ för $x < 0$ så måste $U(x) \rightarrow \infty$ i det området.

3. Problem:

Den kvantmekaniska lösningen för elektronens vågfunktion i väteatomen kan genom variabelseparation delas upp i tre delar: $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$. Ekvationen för $\Phi(\phi)$ får då följande form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k\Phi = 0,$$

där k är en reell konstant. Ta fram lösningen för $\Phi(\phi)$ och visa genom randvillkor hur det magnetiska kvanttalet m_l förhåller sig till k , samt visa vilka värden m_l kan anta baserat på denna ekvation. [5 p]

Lösning:

Lösningen av differentialekvationen ges av följande komplexa exponentialfunktionen:

$$\Phi(\phi) = e^{\pm i\sqrt{k}\phi}.$$

I väteatomen så kommer vågfunktionen vara identiskt om man rör sig i ϕ -led ett helt varv, dvs vi har:

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi).$$

Detta cykliska randvillkor ger nu:

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{k}\phi} &= e^{i\sqrt{k}(\phi+2\pi)} = e^{i\sqrt{k}\phi} \cdot e^{2\pi i\sqrt{k}} \\ e^{2\pi i\sqrt{k}} &= 1 \\ \sqrt{k} &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Vi kan med ovanstående identifiera $\sqrt{k} = m_l$, dvs $k = m_l^2$, och m_l har samma tillåtna värden som $\sqrt{k}$ ovan, dvs $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4. Problem:

Ett rent rotationellt emissionsspektrum från molekylen CH^+ har uppmätts genom att observera nebulosan NGC 7027. De våglängder som detekterats är: 179.62 μm , 119.90 μm , 90.03 μm , 72.14 μm , 60.25 μm . Utgå till en början ifrån att molekylen är en rigid diatomär rotor.

a) Bestäm molekylen storlek, i termer av avståndet mellan jonerna, utifrån dessa data. [4 p]

b) Rotorn är inte exakt rigid. Vad kan de små variationerna i avståndet, som funktion av rotationsenergin, bero på? [1 p]

Lösning:

a) Molekylen rotationsenergi fås av följande uttryck:

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} J(J+1) \quad J = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där R är avståndet mellan kolatomen och väteatomen i molekylen, och den effektiva massan ges av $\mu = m_{\text{H}}m_{\text{C}}/(m_{\text{H}} + m_{\text{C}}) = \dots = 0.9297 \text{ [u]}$.

En övergång från kvanttillståndet J till nästa lägre tillstånd ($J - 1$), motsvarar en fotonemission där fotonen har följande energi:

$$E_{\text{foton}} = \Delta E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} (J(J+1) - (J-1)(J-1+1)) = \frac{\hbar^2 J}{I} = \frac{\hbar^2 J}{\mu R^2}$$

Om vi tittar på uppmätta data och omvandlar till fotonenergier (med $E = hc/\lambda$) så får vi följande fotonenergier: 6.9026, 10.3407, 13.7715, 17.1867, 20.5785, i enheten meV. Dessa energier motsvarar uttrycket $\hbar^2 J/(\mu R^2)$ ovan. Vi ser att de är approximativt

ekvidistanta. Skillnaderna, ΔE , mellan på två följande fotonenergier motsvarar således $\hbar^2/(\mu R^2)$ och fås från data som 3.4381, 3.4308, 3.4152, 3.3917 i enheten meV. Medelvärde är 3.419 meV. Detta ger:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\hbar}{\sqrt{\Delta E_{\text{foton}} \mu}} = \frac{\hbar [\text{eVs}]}{\sqrt{3.419 \cdot 10^{-3} [\text{eV}] \mu}} = \\ &= \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}}{2\pi \sqrt{3.419 \cdot 10^{-3} [\text{eV}] \cdot 0.9297 \cdot 931.502 \cdot 10^6 [\text{eV}]/c^2}} = \\ &= \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} \cdot 2.9979 \cdot 10^8}{2\pi \sqrt{3.419 \cdot 10^{-3} \cdot 0.9297 \cdot 931.502 \cdot 10^6}} [\text{m}] = 1.1468 \cdot 10^{-10} [\text{m}] = \\ &= 0.1147 [\text{nm}]. \end{aligned}$$

b)

Enligt ovanstående (om vi kollar på olika fotonenergier) så varierar avståndet R mellan 0.1144 nm och 0.1151 nm med längre avstånd för större rotationsenergier. Anledningen är att centrifugalaccelerationen påverkar bindningen i den roterande molekylen så att avståndet mellan de två atomerna ökar något i takt med snabbare rotationsfrekvens.

5. Fysikerna Johan och Lisa försöker i slutet av 1800-talet förstå den fotoelektriska effekten med hjälp av ett experiment. Johan har byggt en optisk uppställning som låter ljus med tre olika våglängder falla in mot en metallyta i vakuum. Då elektroner emitteras från metallytan så mäter Lisa deras maximala energi med hjälp av ett elektriskt fält och en strömmätare. För rött ljus med ljusvåglängden $\lambda_1 = 6535 \text{ \AA}$ så ser Lisa inga elektroner alls. För grönt ljus med våglängden $\lambda_2 = 5266 \text{ \AA}$ så mäter hon upp maximal elektronenergi till 0.0500 eV, och för blått ljus med våglängden $\lambda_3 = 4266 \text{ \AA}$ så får hon $E_{e,\text{max}}$ till 0.596 eV. Trots sina fina experimentella resultat så förstår Johan och Lisa inte alls hur den fotoelektriska effekten egentligen fungerar. Det tycker att det är konstigt att det röda ljuset inte ger några emitterade elektroner och de förstår inte sambandet mellan våglängden och elektronenergierna.

a) Beskriv för Johan och Lisa hur formalismen (sambandet mellan ljusvåglängden och elektronernas energi) ser ut och förklara speciellt varför det röda ljuset inte ger några elektroner alls. [1 p]

b) Använd Lisas elektrondata för att beräkna Plancks konstant. [3 p]

c) Beräkna metallens utträdesarbete i elektronvolt (eV). [1 p]

Lösning:

a)

Vi förklarar för Johan och Lisa att ljuset består av fotoner, var och en med energin $E_{\text{foton}} = h\nu = hc/\lambda$. En foton ger sin energi till en elektron, som dessutom behöver övervinna utträdesarbetet, W . För den maximala elektronenergin, E , så får vi således:

$$E = E_{\text{foton}} - W = \frac{hc}{\lambda} - W.$$

Anledningen till att vi inte ser några elektroner för det röda ljuset är att våglängden är för lång, så att $\frac{hc}{\lambda} - W < 0$.

b)

Vi använder det gröna respektive blå ljuset för att beräkna h :

$$\begin{aligned} E_3 - E_2 &= \frac{hc}{\lambda_3} - \frac{hc}{\lambda_2} \\ h &= \frac{E_3 - E_2}{c(1/\lambda_3 - 1/\lambda_2)} = 4.0886 \cdot 10^{-15} [\text{eVs}] = 6.5499 \cdot 10^{-34} [\text{Js}] \end{aligned}$$

Värdet på Plancks konstant, uträknat från Lisas och Johans experimentdata, ligger som synes ganska nära det idag tabellerade värdet.

c)

Vi använder vårt ovan beräknade värde på h och får då utträdesarbetet:

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{hc}{\lambda_3} - W \\ W &= \frac{hc}{\lambda_3} - E_3 = 2.279 \text{ [eV]}. \end{aligned}$$

(Detta värde på W motsvarar metallen natrium som råkade vara den som Lisa och Johan använde sig av i experimentet.)

6. Problem:

Nukliden Au-171 har den ovanliga egenskapen att den kan sönderfalla med antingen alfasönderfall, eller med s.k. protonemission. Denna senare sönderfallstyp fungerar på samma sätt som alfasönderfall, förutom att en proton lämnar kärnan, istället för en alfapartikel.

a) De två sönderfallstyperna (α resp. proton) är för Au-171 ungefär lika sannolika. Vilka är de två möjliga dotterkärnorna? [2 p]

b) Använd relevanta tabellerade massor för att beräkna Q -värdet för protonemissions-sönderfallet. Ange svaret i enheten MeV. [2 p]

c) Vid protonemission så får dotterkärnan en kinetisk rekylenergi. Beräkna denna kinetiska energi. [1 p]

Lösning:

a)

Från det periodiska systemet så ser vi att guld (Au) har atomtalet 79, dvs atomkärnans protontal $Z = 79$. Vi har masstalet, $A = 171$, och får således neutrontalet, $N = 171 - 79 = 92$.

Protonemission innebär att $Z \rightarrow Z - 1$, dvs atomtalet 78 (Pt) och $A \rightarrow A - 1$, dvs 170. Dotterkärnan efter protonemissionssönderfallet blir alltså ^{170}Pt .

Alfasönderfall innebär att $Z \rightarrow Z - 2$, dvs atomtalet 77 (Ir) och $A \rightarrow A - 4$, dvs 167. Dotterkärnan efter alfasönderfallet blir alltså ^{167}Ir .

b)

Q_p -värdet motsvarar skillnaden i massa före och efter sönderfallet:

$$\begin{aligned} Q_p &= \Delta mc^2 = (m_{\text{Au171}} - (m_{\text{Pt170}} + m_{\text{H1}})) c^2 = \\ &= (170.991878 - (169.982495 + 1.007825)) \cdot 931.502 \text{ [MeV}/c^2] \cdot c^2 = \\ &= 1.4513 \text{ [MeV]}. \end{aligned}$$

c)

Energien motsvarande Q_p -värdet fördelas på protonens kinetiska energi och rekyl-energin hos Pt-170. Pga den (relativt) låga kinetiska energin så kan vi räkna klassiskt. Med bevarande av energi och rörelsemängd så kan vi lätt härleda förhållandet mellan Q_p -värdet och dotterkärnans kinetiska energi, E_R , och räkna ut den senare:

$$E_R = \frac{Q_p}{1 + \frac{m_{\text{Pt170}}}{m_p}} = Q_p \cdot 5.8909 \cdot 10^{-3} = 8.55 \text{ [keV]}.$$

Här har vi för enkelhets skull använt protonens massa, m_p , samt *atommassan* för dotterprodukten, m_{Pt170} . Vi noterar att rekylenergin som väntat blir liten i förhållande till Q_p -värdet.

7. Problem:

En av de mest problematiska radioisotoperna nu några år efter kärnkraftsolyckan 2011 i Fukushima är ^{90}Sr , pga dess halveringstid på 28.9 år. Strontium-90 sönderfaller i två steg, först med β^- -sönderfall till ^{90}Y och sedan sönderfaller ^{90}Y i sin tur (också β^-) till ^{90}Zr (som är stabil). Nukliden ^{90}Y har halveringstiden 64.05 timmar.

Betrakta ett prov med helt rent ^{90}Sr vid tiden $t = 0$, med aktivitet 10 mCi. Vid $t = 0$ så finns alltså ingen ^{90}Y i provet.

a) Beräkna tiden t_1 (i enheten år), då aktiviteten (från endast ^{90}Sr) har sjunkit till 1 mCi. [2 p]

b) Rita (för provet ifråga) upp aktiviteten $A_{Y90}(t)$ samt aktiviteten $A_{Sr90}(t)$ i samma plot, som två kurvor i intervallet från $t = 0$ till $t = 10$ dagar. Visa tydligt eventuella fallande, stigande, eller ungefär konstanta trender i de två kurvorna, och visa (använd samma skala på y -axeln) deras ungefärliga aktivitet i relation till varandra i detta tidsintervall. Det går att lösa uppgiften exakt m.h.a. en differentialekvation, men även lösningar av mer resonerande karaktär är tillåtna. [2 p]

c) Ge ett ungefärligt värde på A_{Y90} (uttryckt i mCi) vid tiden t_1 (alltså då $A_{Sr90} = 1$ mCi). [1 p]

Lösning:

a)

Aktiviteten, A , som funktion av tid för Sr-90 kan uttryckas som:

$$A(t) = A(0)e^{-\lambda_{\text{Sr}}t},$$

där sönderfallskonstanten λ_{Sr} beror av halveringstiden enligt: $\lambda_{\text{Sr}} = \ln 2/t_{1/2}$. Vi löser ut tiden, t och sätter in värden:

$$t = \frac{t_{1/2} \ln \left(\frac{A(t)}{A(0)} \right)}{-\ln 2} = \frac{28.9 [\text{år}] \ln \left(\frac{1}{10} \right)}{-\ln 2} = 96.0 [\text{år}].$$

Vi ser att det tar 96 år innan Sr-90-aktiviteten sjunkit till 1 mCi i provet.

b)

Vid tiden $t = 0$ så är $A_{\text{Sr90}} = 10$ [mCi] och $A_{Y90} = 0$. I takt med att sönderfall sker från Sr-90 till Y-90 så ökar antalet Y-90-kärnor, N . Därmed så ökar också aktiviteten A_{Y90} , enligt sambandet $A_{Y90} = \lambda_{Y90}N_{Y90}$. Efter tillräckligt lång tid så närmar vi oss ett jämviktsläge då antalet sönderfall *till* Y-90 och antal sönderfall *från* Y-90 är lika stort per tidsenhet. Efter några halveringstider (10 dagar motsvarar 3.75 halveringstider) så börjar vi närma oss detta jämviktsläge.

Problemet kan lösas exakt genom att betrakta följande differentialekvation, där $N_{Y90}(t)$, är antalet Y-90-kärnor vid tiden t :

$$\begin{aligned} \frac{dN_{Y90}(t)}{dt} &= -\lambda_{Y90}N_{Y90} + \lambda_{\text{Sr90}}N_{\text{Sr90}} \\ \frac{dN_{Y90}(t)}{dt} &= -\lambda_{Y90}N_{Y90} + \lambda_{\text{Sr90}}N_{\text{Sr90}}(0)e^{-\lambda_{\text{Sr90}}t} \end{aligned}$$

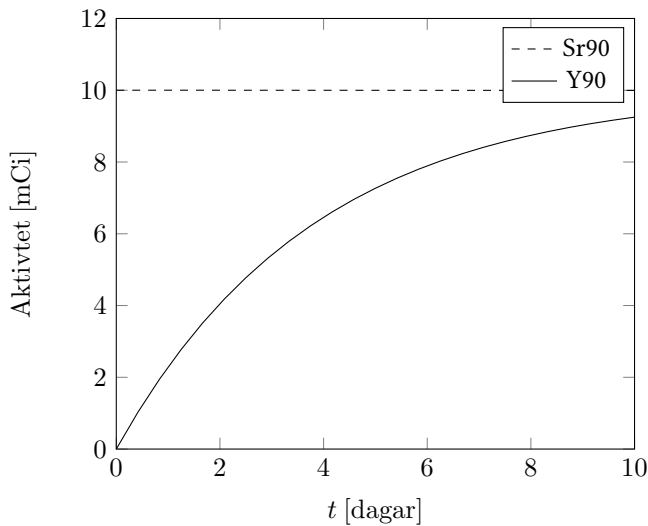
Med begynnelsevillkoret $N_{Y90}(0) = 0$ så får vi (efter en del räknande som inte visas här) lösningen:

$$N_{Y90}(t) = \frac{N_{\text{Sr90}}(0)\lambda_{\text{Sr90}}}{\lambda_{Y90} - \lambda_{\text{Sr90}}} (e^{-\lambda_{\text{Sr90}}t} - e^{-\lambda_{Y90}t})$$

Eftersom $\lambda_{Y90} \gg \lambda_{\text{Sr90}}$ och med sambandet $A = N\lambda$ så kan vi förenkla lösningen till följande:

$$A_{Y90}(t) = A_{\text{Sr90}}(0)(e^{-\lambda_{\text{Sr90}}t} - e^{-\lambda_{Y90}t})$$

Resultatet för både $A_{Y90}(t)$ och $A_{\text{Sr90}}(t)$ plottas här mellan $t = 0$ och $t = 10$ dagar:



I detta tidsintervall så är A_{Sr90} nästan konstant (10 mCi) pga dess långa halveringstid på 28.9 år. Vid $t = 0$ så är förstås $A_{\text{Y90}} = 0$, och när $t \gg \lambda_{\text{Y90}}$ så försvinner den andra termen i parentesen i ekvationen ovan, vilket gör att $A_{\text{Y90}} \approx A_{\text{Sr90}}$.

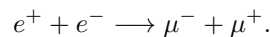
c)

Eftersom $t_1 = 96$ år är många storleksordningar större än halveringstiden för Y-90 så har ett jämviktsläge mellan de två aktiviteterna sedan länge uppstått. I detta jämviktsläge så sker (per tidsenhet) lika många sönderfall från Sr-90 till Y-90 som från Y-90 till Zr-90. Detta betyder att de två aktiviteterna är lika stora. Aktiviteten för Y-90 är alltså 1 mCi vid tiden $t_1 = 96$ år.

8. Problem:

Vi tänker oss ett experiment designat så att elektroner (e^-) som är i vila i laboratoriet bombarderas av positroner (e^+) som har accelererats till hög hastighet med en accelerator.

Vid tillräckligt hög kinetisk energi för positronerna så är följande reaktion möjlig:



a) Betrakta först reaktionen från masscentrumsystemet (här markerat som 'cm'). Vilken kinetisk energi, $E_{k,\text{cm}}$, krävs hos positronen (tillsammans med samma kinetiska energi för elektronen) för att reaktionen ska vara möjlig? [1 p]

b) Betrakta nu experimentet från labsystemet. Beräkna den minsta kinetiska energi $E_{k,\text{lab}}$ (i labsystemet) som krävs för den inkommande positronen för att reaktionen ska kunna ske. [4 p]

Lösning:

Vi har i detta problem vilomassorna $m_\pi = 105.658 \text{ MeV}/c^2$ och $m_e = 0.511003 \text{ MeV}/c^2$.

a) I masscentrumsystemet (cm) så kommer positronen och elektronen med samma hastighet v_{cm} från varsitt håll. Lorentzfaktor är $\gamma_{\text{cm}} = 1/\sqrt{1 - (v_{\text{cm}}/c)^2}$.

Vid precis lagom stor kinetisk energiså kommer den totala relativistiska energin hos elektronen och positronen att förvandlas till viloenenergierna hos μ^+ och μ^- . Dessa två partiklar kan sedan anses vara i vila i detta system.

Vi sätter nu energierna före och efter lika med varandra:

$$2m_e\gamma_{\text{cm}}c^2 = 2m_\pi c^2,$$

vilket ger $\gamma_{\text{cm}} = \frac{m_\pi}{m_e}$. Den (minsta nödvändiga) kinetiska energin hos positronen i cm-systemet, $E_{\text{k,cm}}$, kan nu skrivas upp direkt:

$$E_{\text{k,cm}} = m_e c^2 (\gamma_{\text{cm}} - 1) = m_e c^2 \left(\frac{m_\pi}{m_e} - 1 \right) = (m_\pi - m_e) c^2 = 105.15 \text{ [MeV]}.$$

b) Problemet att hitta $E_{\text{k,lab}}$ kan lösas på flera sätt. Vi börjar med att använda hastighetstransformationer. Vi skriver upp följande samband:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x},$$

där vi kan identifiera det prim:ade systemet (S') som cm-systemet och det oprim:ade (S) som labsystemet. Positronens hastighet i labsystemet är alltså u_x och dess hastighet i cm-systemet är u'_x . Betraktat från cm-systemet så inser vi nu att cm-systemets hastighet i förhållande till labsystemet är samma hastighet som u'_x , dvs vi identifierar $v = v_{\text{cm}}$ och $u'_x = v_{\text{cm}}$. Det ger:

$$\left(\frac{v}{c} \right)_{\text{lab}} = \frac{2 \left(\frac{v}{c} \right)_{\text{cm}}}{1 + \left(\frac{v}{c} \right)_{\text{cm}}^2}.$$

Vi kan nu skriva om uttrycket i termer av Lorentzfaktorerna γ_{cm} och γ_{lab} med hjälp av sambandet $v/c = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$:

$$\left(\frac{v}{c} \right)_{\text{lab}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_{\text{lab}}^2}} = \frac{2 \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_{\text{cm}}^2}}}{1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma_{\text{cm}}^2} \right)},$$

vilket efter lite algebra kan reduceras till sambandet: $\gamma_{\text{lab}} = 2\gamma_{\text{cm}}^2 - 1$. Vi kan nu skriva upp den kinetiska energin för positronen i labsystemet:

$$\begin{aligned} E_{\text{k,lab}} &= m_e c^2 (\gamma_{\text{lab}} - 1) = 2m_e c^2 (\gamma_{\text{cm}}^2 - 1) = 2m_e c^2 \left(\left(\frac{m_\pi}{m_e} \right)^2 - 1 \right) \\ &= 43.7 \text{ [GeV]}. \end{aligned}$$

Det är värt att notera att denna energi i labsystemet är flera hundra gånger större än den kinetiska energin som behövs i labsystemet. Detta var anledningen till att man började bygga accelerators med strålar från två håll.

En sak som kan vara viktig att tänka på i ett problem som detta är att, eftersom hastigheterna (v_{lab} och v_{cm}) ligger nära ljusets hastighet, så kommer uttryck som tex v_{cm}/c ligga mycket nära 1. Det innebär att det är vanskligt att skriva upp hastigheterna som ett delresultat, eftersom det blir så många 9:or som decimaler att hålla koll på. Och eftersom miniräknare har begränsad precision så kan även de få problem med noggrannheten nära 1. Därför så är det bättre att uttrycka hastigheter i termer av tex. γ , eller som kinetisk energi. Allra bäst är förstås att undvika att spara delresultat i numerisk form.

Problemet kan alternativt lösas (eleganter) om man jämför den totala relativistiska energin i labsystemet, före och efter reaktionen, och sätter dessa energier lika med

varandra:

$$\begin{aligned}E_{\text{fore}} &= E_{\text{efter}} \\ \gamma_{\text{lab}} m_e c^2 + m_e c^2 &= 2 \gamma_{\text{cm}} m_\pi c^2 \\ m_e c^2 (\gamma_{\text{lab}} + 1) &= \left[\gamma_{\text{cm}} = \frac{m_\mu}{m_e}, \text{ enligt ovan} \right] = 2 m_e c^2 \left(\frac{m_\pi}{m_e} \right)^2 \\ \gamma_{\text{lab}} &= 2 \left(\frac{m_\pi}{m_e} \right)^2 - 1 \\ E_{\text{k,lab}} &= m_e c^2 (\gamma_{\text{lab}} - 1) \\ E_{\text{k,lab}} &= 2 m_e c^2 \left(\left(\frac{m_\pi}{m_e} \right)^2 - 1 \right) \\ &= 43.7 \text{ [GeV]}.\end{aligned}$$