

Frågor med förslag till lösningar. OBS: detta dokument innehåller ej fullständiga lösningar!

Uppgift 1

Fråga

1. En partikel i en potential $V(x)$ har vågfunktionen

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= Axe^{ax}, \text{ för } x > 0 \\ \Psi(x) &= 0, \quad \text{för } x < 0\end{aligned}$$

a) Normera vågfunktionen, dvs. bestäm konstanten A . [1p]

b) Bestäm väntevärdet $\langle p^2 \rangle$. [3p]

c) Bestäm medelvärdet av partikelns kinetiska energi. [1p]

Tips: Följande integral är användbar i detta problem

$$\int_0^\infty r^m e^{-br} dr = \frac{m!}{b^{m+1}}$$

Lösning

(a)

$$\int_0^\infty \Psi^* \Psi dx = 1, \quad A^2 \int_0^\infty x^2 e^{-2ax} dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 2a^{3/2}$$

(b) Rörelsemängdsoperatoren är (från formelbladet)

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

och väntevärdet är

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^\infty \Psi^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)^2 \Psi dx = -\hbar^2 A^2 \int_0^\infty x e^{-ax} (-2ae^{-ax} + a^2 x e^{-ax}) dx = A^2 \hbar^2 / 4a = a^2 \hbar^2$$

(c) Medelvärdet av partikelns kinetiska energi är

$$\langle KE \rangle = \langle p^2 \rangle / 2m = a^2 \hbar^2 / 2m$$

Uppgift 2

Fråga

2. a) Visa att lösningen till Schrödingerekvationen för en fri partikel i tre dimensioner

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = E\Psi.$$

kan skrivas

$$\Psi(x, y, z) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad [2p]$$

b) Vad är sambandet mellan $k = (k_x, k_y, k_z)$ och energin E ? [3 p]

Lösning

(a) Den tidsberoende Schrödingerekvationen i tre dimensioner:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z).$$

Variabelseparation ger:

$$\Psi(x, y, z) = \Psi(x)\Psi(y)\Psi(z)$$

Vi får:

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} &= E_x\Psi(x) \\ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} &= E_y\Psi(y) \\ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} &= E_z\Psi(z) \end{aligned}$$

x delen:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE_x\Psi(x)}{\hbar^2} = 0$$

har en lösning $\Psi(x)$ i formen $e^{\pm ik_x x}$.

Anta att

$$\Psi(x) = Be^{ik_x x} \quad \text{där} \quad k_x^2 = 2mE_x/\hbar^2.$$

Samma gäller för y och z och vågfunktionen blir:

$$\Psi(x, y, z) = Be^{ik_x x} Ce^{ik_y y} De^{ik_z z} = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

(b) Sätt $\Psi(x, y, z)$ i Schrödingerekvationen:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z).$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z).$$

Lösningen ger:

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = E.$$

Uppgift 3

Fråga

Två kärnor med samma antal nukleoner (masstal) men olika antal protoner kallas isobarer. Spegelisobarer betecknar kärnor där dessutom antalet protoner och neutroner har bytts mellan kärnorna, t.ex. ${}^{23}_{11}\text{Na}$ och ${}^{23}_{12}\text{Mg}$. Beräkna bindningsenergin per nukleon för dessa två kärnor. Hur förklararas skillnaden? Atomära massor : $M({}^{23}_{11}\text{Na}) = 22.989767 \text{ u}$, $M({}^{23}_{12}\text{Mg}) = 22.994127 \text{ u}$.

Lösning

$B(Z, A)$ för ${}^{23}_{11}\text{Na}$:

$$B(11, 23) = [11m_p + 12m_n - M_{\text{atom}}({}^{23}\text{Na}) - 11m_e]c^2 = 186.6 \text{ MeV}$$

$$B(Z, A)/A = \frac{B(11, 23)}{23} = 8.1 \text{ MeV}$$

$B(Z, A)$ för ${}^{23}_{12}\text{Mg}$:

$$B(12, 23) = [12m_p + 11m_n - M_{\text{atom}}({}^{23}\text{Mg}) - 12m_e]c^2 = 181.7 \text{ MeV}$$

$$B(Z, A)/A = \frac{B(12, 23)}{23} = 7.9 \text{ MeV}$$

Tämligen lika B/A värden, vilket innebär att bindningen från stark växelverkan är i stort sett densamma för neutroner och protoner. Protoner ger upphov till viss repulsion vilken gör att ${}^{23}_{12}\text{Mg}$ har ett lite lägre B/A -värde än ${}^{23}_{11}\text{Na}$.

Uppgift 4

Fråga

Endast en av följande elektronkonfigurationer (a,b,c,d) är tillåten:

konfiguration a: $1s^2, 2s^2, 2p^8, 3s^2, 3p^2$

konfiguration b: $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^3, 3p^2$

konfiguration c: $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^4$

konfiguration d: $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^7$

a) Vilken är den korrekta konfigurationen och vilken är atomen som den motsvarar? Motivera för varje icke-giltig konfiguration varför du förkastar den. [4 p]

b) Vilken viktig princip har vi brutit mot i de övriga 3 icke-giltiga konfigurationerna? [1 p]

Lösning

(a) Konfiguration c är korrekt. Det totala antalet elektroner är $2 + 2 + 6 + 2 + 4 = 16$, dvs vi har grundämnet svavel (S).

Fel i konf. a: $2p^8$ ej tillåtet. Vi får endast ha $2(2l + 1) = 2(2 + 1) = 6$ elektroner i 2p-skalet.

Fel i konf. b: $3s^3$ ej tillåtet. Vi får endast ha $2(2l + 1) = 2(1) = 2$ elektroner i 3s-skalet.

Fel i konf. d: $3p^7$ ej tillåtet. Vi får endast ha $2(2l + 1) = 2(2 + 1) = 6$ elektroner i 2p-skalet.

(b) Vi har, i konfigurationerna a, b, och d, brutit mot Pauliprincipen, som säger att varje elektron har en unik uppsättning kvanttal $n; l; m_l; m_s$. Kvanttalerna n, l, m_l beror av varandra, se t ex formelbladet, men m_s kan alltid anta två olika värden; $m_s = +1/2, -1/2$.

Uppgift 5

Fråga

Comptonspridning kan användas både för att mäta riktning och energi hos fotoner i kärnfysikexperiment. För ett visst preparat mättes ett spektrum hos comptonspridda elektroner som tydligt motsvarade en i stort sett monokromatisk gamma-strålning. Den maximala elektronenergin mättes till 170 keV. Beräkna våglängden för den inkommande monokromatiska strålningen. [5 p]

Lösning

För Comptonspridning, kan vi använda formlerna i ekv. (1) och (2), vilka finns i formelbladet. E är energin för den inkommande fotonen och E' är energin för den spridda fotonen:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} \quad (1)$$

eller

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos\theta) \quad (2)$$

där $E = hc/\lambda$. Energibevaring ger:

$$E + m_e c^2 = m_e c^2 + T_e + E', \quad T_e = E - E'$$

där T_e är elektronens kinetisk energi.

$$T_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \quad (3)$$

Kombinera (2) och (3):

$$T_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) + \lambda}$$

Vid 180° ($\cos\theta = -1$) spridning av den inkommande fotonen blir den spridda fotonens energi E' den lägsta möjliga, vilket ger den högsta möjliga energin T_e för elektronen.

$$T_e = \frac{hc}{\lambda} \left(\frac{2h/m_e c}{2h/m_e c + \lambda} \right)$$

vilket ger:

$$\lambda^2 - \frac{2hc\lambda}{m_e c} + \frac{2h^2 c^2}{m_e c^2 T_e} = 0$$

där $T_e = 170$ keV och $m_e c^2 = 0.511$ MeV.

Ekvationen har en lösning: $\lambda = 0.0643$ nm.

Uppgift 6

Fråga

I atomärt väte finns en uppsplittring av energinivån p g a upplinjer av protonens och elektronens spinn. En övergång mellan nivåerna resulterar i utsändandet av en radiovåg med våglängden 21 cm. Övergången är "förbjuden" vilket gör att den är sällsynt, samt att det existerade tillståndet är långlivat med en livstid av ungefär 10^5 år. I galaxer finns dock tillräckligt många vätaatomer för att vågor från denna övergång skall kunna observeras på jorden. a) Antag att medellivslängden motsvarar en tidsosäkerhet för tillståndet. Bestäm osäkerheten i energiskillnaden vid mätning av övergången. [1 p] b) Vilken fotonenergi observeras om vågorna sänds ut från en galax med hastigheten $0.1c$ jämfört med jorden? [4 p]

Lösning

(a)

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2, \quad \Delta t = 10^5 \text{ år} = 3 \times 10^{12} \text{ s}$$

$$\Delta E = \hbar/2\Delta t \approx 1 \times 10^{-28} \text{ eV}.$$

(b) Dopplerskift enligt formelbladet:

$$f = \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta)}$$

$$\lambda = \lambda_0\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta) = \lambda_0 \frac{(1 + \frac{v}{c}\cos\theta)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Om supernovan rör sig bort från jorden är $\theta = 0^\circ$ och $\cos\theta = 1$ ger:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{(1 + \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + 0.1}{1 - 0.1}}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240}{0.21} \sqrt{\frac{0.9}{1.1}} \approx 5.3 \times 10^{-6} \text{ eV}.$$

Energiändringen hos fotonerna pga Dopplerskiftet ($\approx 5.3 \times 10^{-6}$ eV) är ansevärt större än energiosäkerheten pga tillståndets livstid.

Uppgift 7

Fråga

I ett tabellverk kan man läsa att $\tau c = 491 \mu\text{m}$ för en B^+ -meson, där c är ljushastigheten i vakuum och τ är medellivslängden i partikelns vilosystem. Samtidigt finner man i beskrivningen från ett experiment att medelsträckan en B^+ -meson färdas innan den sönderfaller är 3 mm. Vilken rörelsemängd måste B^+ -mesonen ha i experimentet? (B^+ -mesonens massa är $5279 \text{ MeV}/c^2$) [5p]

Lösning

Rörelsemängden som vi mäter i laboratoriet är $p = m\gamma v$, där mesonen färdas med hastighet v .

Tidsdilation ger att vi i laboratoriet mäter en medellivstid t där $t = \gamma t' = \gamma \tau$.

Medelsträckan mesonen färdas innan den sönderfaller är L där $L = vt = v\gamma\tau$.

Från detta fås:

$$p = m\gamma v = m\gamma \frac{L}{\gamma\tau} = \frac{mcL}{c\tau} = 32 \text{ GeV}/c$$

Uppgift 8

Fråga

Den tvåatomiga molekylen HO har en fjäderkonstant på $9.68 \times 10^2 \text{ kg/s}^2$ och ett jämviktsavstånd på 0.092 nm. Den befinner sig i ett exiterat tillstånd där vibrationskvanttalet $V = 4$ och rotationskvanttalet $J = 1$.

- a) Vilken/vilka övergångar är möjliga för molekylen? Varför? [3p]
 b) Beräkna våglängden av fotoner som emitteras vid dessa övergångar. [2p]

Lösning

Enligt formelsamlingen är vibrationsenergin

$$E_{\text{vib}} = \left(V + \frac{1}{2}\right) h \nu_0, \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

där μ är den reducerade massan

$$\mu = \frac{m_H m_O}{m_H + m_O}.$$

Enligt formelsamlingen är rotationsenergin

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} J(J+1).$$

Den totala energin är

$$E = E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}},$$

Energien för tillståndet med $V = 4$ och $J = 1$:

$$E_{V=4, J=1} = E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}} = \left(4 + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} + \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} (1+1)$$

där

$$\mu = \frac{1.0079 \times 15.9994}{17.0073} = 0.94 \text{ u},$$

$k = 9.68 \times 10^2 \text{ kg/s}^2$ och $R = 0.092 \text{ nm}$.

(a) Övergången från en tillstånd med energin $E_{V=4, J=1}$ till ett lägre energitillstånd måste följa urvalsregeln $\Delta J = \pm 1$. För en harmonisk oscillator måste även urvalsregeln $\Delta V = \pm 1$ följas, se Harris bok, sid 430-432. Om vi antar att $\Delta V = \pm 1$ och $\Delta J = \pm 1$, så är två övergångar möjliga från ett tillstånd med $V = 4, J = 1$. Dessa är $V = 4, J = 1 \rightarrow V = 3, J = 0$ och $V = 4, J = 1 \rightarrow V = 3, J = 2$.

(b) För övergången $V = 4 \rightarrow V = 3$ och $J = 1 \rightarrow J = 0$ fås

$$E_{\text{foton}} = \Delta E = \Delta E_{\text{vib}} + \Delta E_{\text{rot}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(4 + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} - \left(3 + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} + \left(\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}(2)\right) \\
&= \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} + \left(\frac{\hbar^2}{\mu R^2}\right)
\end{aligned}$$

$$E_{\text{foton}} = \Delta E = (0.510 + 0.005) \text{ eV} = 0.515 \text{ eV}$$

$$E_{\text{foton}} = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2.41 \text{ } \mu\text{m}.$$

För övergången $V = 4 \rightarrow V = 3$ och $J = 1 \rightarrow J = 2$ fås

$$\begin{aligned}
E_{\text{foton}} = \Delta E &= \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} - \left(\frac{2\hbar^2}{\mu R^2}\right) \\
&= (0.510 + 0.010) \text{ eV} = 0.520 \text{ eV}
\end{aligned}$$

$$E_{\text{foton}} = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2.38 \text{ } \mu\text{m}.$$

Observera att urvalsregeln $\Delta V = \pm 1$ är giltig bara vid lägre energier där den harmoniska oscillatorapproximationen är gällande. I andra fall, kan övergångar t.ex. med $\Delta V = \pm 2$ vara möjliga.