

Lösningar till problemtentamen, SG1113, 17/12, 2024

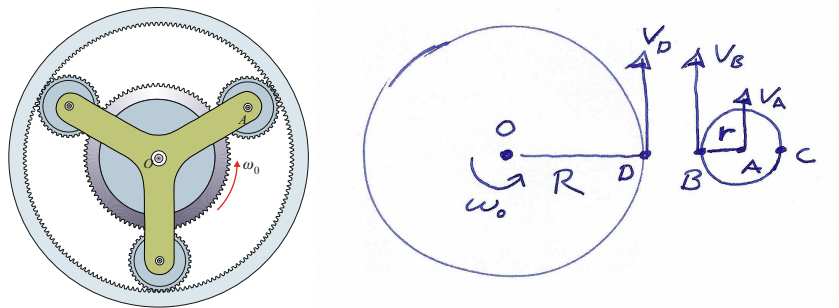
1. Låt planetbärarens vinkelhastighet vara ω . Då fås

$$v_A = (R + r)\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{R + r}. \quad (1)$$

Eftersom C är momentancentrum för det lilla hjulet fås att $v_A = v_B/2$. Det lilla hjulet rullar utan att glida på det stora inre hjulet. Därför är $v_B = v_D = \omega R$. Vi får nu

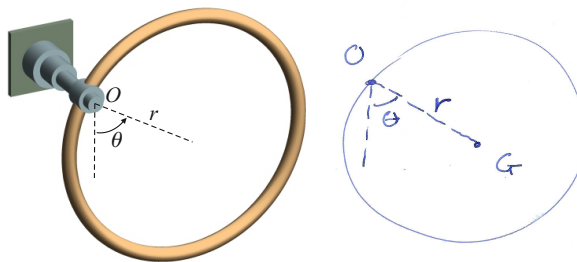
$$\omega = \frac{1}{2} \frac{v_D}{R + r} = \frac{1}{2} \frac{R}{R + r} \omega. \quad (2)$$

Planetbäraren roterar åt samma håll som det inre hjulet.



2. Ringens kinetiska energi är

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (I_G + mr^2) \dot{\theta}^2 = mr^2 \dot{\theta}^2 \quad (3)$$



Dess potentiella energi kan skrivas

$$V = -mgr \cos \theta \quad (4)$$

I begynnelsestillståndet har vi att $T = V = 0$. Energiekvationen ger

$$0 = mr^2 \dot{\theta}^2 - mgr \cos \theta \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{r} \cos \theta} \quad (5)$$

Vinkelaccelerationen fås genom att derivera

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{r} \cos \theta \quad (6)$$

med avseende på tiden. Detta ger

$$2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{g}{r} \sin \theta. \quad (7)$$

Om vi definierar vinkelaccelerationen, α , som positiv medurs så får vi

$$\alpha = -\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{g}{r} \sin \theta, \quad (8)$$

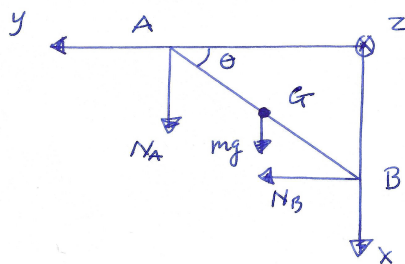
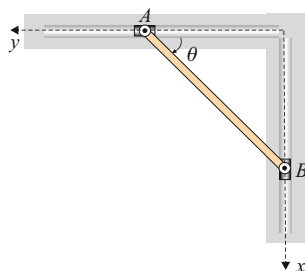
vilket vi också får direkt genom momentekvationen.

3. Newtons andra lag ger

$$m\ddot{x}_G = mg + N_A \quad (9)$$

$$m\ddot{y}_G = N_B \quad (10)$$

Vi har att



$$x_G = l \sin \theta \quad (11)$$

$$y_G = l \cos \theta \quad (12)$$

$$\dot{x}_G = l \cos \theta \dot{\theta} \quad (13)$$

$$\dot{y}_G = -l \sin \theta \dot{\theta} \quad (14)$$

$$\ddot{x}_G = -l \sin \theta \ddot{\theta} + l \cos \theta \dot{\theta}^2 \quad (15)$$

$$\ddot{y}_G = -l \cos \theta \ddot{\theta} - l \sin \theta \dot{\theta}^2 \quad (16)$$

Stångens kinetiska energi är

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (17)$$

och dess potentiella energi är

$$V = -mgx_G = -mgl \sin \theta. \quad (18)$$

Energiekvationen ger nu

$$0 = \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \sin \theta \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \theta . \quad (19)$$

Derivering ger

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \cos \theta . \quad (20)$$

Vi stoppar nu in (19) och (20) i (15) och (16) och får

$$\ddot{x}_G = -\frac{9}{4} \sin^2 \theta g + \frac{3}{4} g \quad (21)$$

$$\ddot{y}_G = -\frac{9}{8} \sin(2\theta) g . \quad (22)$$

Slutligen stoppar vi in (21) i (9) och (22) i (10) och löser för normalkrafterna

$$N_A = -\frac{1}{4}(1 + 9 \sin^2 \theta)mg , \quad (23)$$

$$N_B = -\frac{9}{8} \sin(2\theta)mg . \quad (24)$$

Notera att minustecknen innebär att krafterna är riktade åt motsatt håll jämfört med figuren. Men det kunde vi inte veta med säkerhet då vi började lösa problemet. De maximala beloppen ges av

$$|N_A|_{\max} = \frac{5}{2}mg \text{ för } \theta = \frac{\pi}{2} , \quad (25)$$

$$|N_B|_{\max} = \frac{9}{8}mg \text{ för } \theta = \frac{\pi}{4} . \quad (26)$$

4. Se lösning av problem 6.14 i boken

