

Tentamen för SH1014 Modern fysik

⇒ Lösningsförslag: inkluderade!

2026-01-07, 8:00–13:00, KTH, Stockholm

Examinator och kursansvarig: Christian Ohm (070-091 91 05)

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare, bifogat formelblad

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng enligt följande:

Betyg A:	36-40 points
B:	32-35.5 poäng
C:	28-31.5 poäng
D:	24-27.5 poäng
E:	20-23.5 poäng
Fx:	18-19.5 poäng
F:	0-17.5 poäng

Motivera dina svar tydligt med uträkningar, text, och figurer när det är lämpligt. Skriv tydligt och tänk på att svara med ett rimligt antal värdesiffror. Du får göra egna, rimliga uppskattningar när det behövs så länge du motiverar dem väl. Det ska framgå tydligt från din lösning vilka antaganden och uppskattningar du gjort. För full poäng ska uträkningar göras analytiskt så långt som möjligt.

Lycka till! / Christian & Pär

Uppgift 1

Nu i januari 2026 är det exakt 100 år sedan Schrödinger publicerade forskningsartikeln som introducerade vågekvationen som skulle komma att uppkallas efter honom. Vi ska nu fira detta genom att använda Schrödingerekvationen.

En partikel med massan m befinner sig i en endimensionell potential $U(x)$ som endast beror av positionen x . Partikelns vågfunktion kan ges av:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^2e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A . [2p]

⇒ Lösningsförslag:

$$\int_0^\infty \psi^2(x) dx = A^2 \int_0^\infty x^4 e^{-2ax} dx = A^2 \frac{4!}{(2a)^{4+1}} = A^2 \frac{24}{32a^5} = 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow A = \frac{2a^{5/2}}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

- (b) Bestäm partikelns energi E genom att använda den tidsberoende Schrödingerekvationen. [2p]

⇒ Lösningsförslag: Vi tar först fram andraderivatan av vågfunktionen för positiva x (mha produktregeln):

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} (Ax^2e^{-ax}) = A(2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax}) \quad (3)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = A \frac{d}{dx} (2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax}) \quad (4)$$

$$= A(2e^{-ax} - 2axe^{-ax} - 2axe^{-ax} + a^2x^2e^{-ax}) \quad (5)$$

$$= Ae^{-ax}(2 - 4ax + a^2x^2) = \psi(x) \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} + a^2 \right) \quad (6)$$

Nu är vi redo att skriva ner jubilaren:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (7)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x) \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} + a^2 \right) + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (8)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} + a^2 \right) + U(x) = E \quad (9)$$

Energien E beror inte på x , så vi kan identifiera:

$$E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m} \quad (10)$$

- (c) Genom att dra nytta av ditt arbete för att lösa (b), skriv ner uttryck för potentialen $U(x)$ i samma x -intervall som vågfunktionen är angiven för. [1p]

⇒ Lösningförslag: Termerna som beror på x kan identifieras som potentialen. För $x \leq 0$ är vågfunktionen noll, så där måste potentialen vara oändlig.

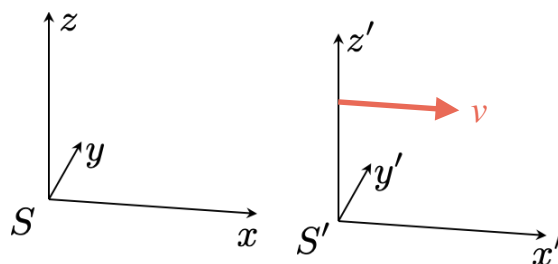
$$U(x) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{mx} \left(\frac{1}{x} - 4a \right), & x > 0 \\ \infty, & x \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Uppgift 2

Den speciella relativitetsteorin utgör tillsammans med kvantmekaniken viktiga grundpelare för mycket i den moderna fysiken.

- (a) Rita en figur som visar koordinatsystemen för två inertialsystem S och S' , och definiera deras relativa rörelse längs deras x - respektive x' -axlar i figuren. Visa med hjälp av Lorentztransformationen att två händelser som sker samtidigt i S' generellt sett inte sker samtidigt i S , om inertialsystemens relativa hastighet är relativistisk. [3 p]

⇒ Lösningförslag: En figur som denna är vad som efterfrågas:



Låt oss tänka oss två händelser, och titta på skillnaden mellan tidpunkterna för dem i S , uttryckt i koordinaterna för S' :

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2) - \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1) \quad (12)$$

Om händelserna inträffar samtidigt i S' får vi

$$t_2 - t_1 = \gamma \frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1) \quad (13)$$

dvs de sker inte samtidigt i S (så länge händelserna sker på olika plats i S').

- (b) En annan konsekvens av speciell relativitetsteori är längdkontraktion. En stav med längden L är i vila i S och placerad längs med x -axeln, och en observatör i vila i S' rör sig bort från staven med hastigheten $\bar{v} = v\hat{x}$. Uppmäter observatören stavens längd som längre eller kortare än en observatör som är i vila i S ? Bestäm stavens längd enligt observatören i S' om $v = 0,95c$. [2p]

⇒ Lösningförslag: Som regel uppfattas objekt som längst i sin egen inertialram (L_0), och observatörer i andra inertialramar kommer att uppfatta objektet som kortare (L) i riktningen för den relativa hastigheten mellan ramarna, och sambandet ges av $L = L_0/\gamma$. Med $v = 0.95c$ fås

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.95^2}} \Rightarrow L = L_0 \sqrt{1 - 0.95^2} \approx 0.31L_0 \quad (14)$$

Staven uppfattas alltså ha 31% av sin egenlängd.

Obs! Det är värt att notera att riktningen alltså inte spelar någon roll, effekten är densamma oavsett om observatören är på väg mot eller ifrån objektet.

Uppgift 3

Elektronens motsvarighet i den tredje generationens fermioner i partikelfysikens standardmodell är tau-leptonen (τ^-). Den har en massa $m = 1,8 \text{ GeV}/c^2$ och en genomsnittlig livstid $\tau = 2,9 \times 10^{-13} \text{ s}$. Hur långt skulle en tau-lepton som i en partikelkollision skapas med en rörelsemängd $p = 45 \text{ GeV}/c$ färdas i genomsnitt i labbets referensram innan den sönderfaller? [5p]

⇒ Lösningförslag: Vi kan utnyttja följande samband från formelsamlingen:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (15)$$

som med naturliga enheter (dvs då vi låter $\hbar = c = 1$, så att E , p och m får samma enhet) blir:

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow E = \sqrt{p^2 + m^2} \quad (16)$$

För att få ut Lorentzfaktorn för tidsdilatationen använder vi:

$$E = \gamma m c^2 = \gamma m \rightarrow \gamma = \frac{E}{m} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} \approx \frac{45,036 \text{ GeV}}{1,8 \text{ GeV}} = 25,02$$

Nu har vi allt vi behöver för att beräkna den genomsnittliga sträcka som en tau-lepton färdas i labbramen innan den sönderfaller, och ta hänsyn till dess hastighet ($v = \beta c$), tidsdilatation (γ), den genomsnittliga livstiden i sin egna referensram (τ):

$$L = \beta c \gamma \tau$$

Flera sätt att ta fram β går att använda här. Ett elegant sätt att få $\beta\gamma$ är att utnyttja definitionen av relativistisk rörelsemängd:

$$p = \gamma m v = \gamma m \beta c \rightarrow \beta \gamma = \frac{p}{m c}$$

vilket i naturliga enheter förenklas till $\beta\gamma = p/m$, och vi får

$$L = \beta c \gamma \tau = \frac{p c \tau}{m} = \frac{45 \text{ GeV} \times 2,998 \times 10^8 \text{ m/s} \times 2,9 \times 10^{-13} \text{ s}}{1,8 \text{ GeV}} \approx 0,00217355 \text{ m}$$

Svaret blir alltså ca 2,1 mm.

Obs! Om β -faktorn utelämnats från uttrycket för L med motiveringen att den räknats fram och är så pass nära 1 att den kan försummas givet precisionen på de givna variablerna ($\beta = 0,9992$) ges full poäng. Om den saknas utan förklaring ges poängavdrag.

Uppgift 4

Under 2025 publicerades en forskningsartikel av kollegor på KTH som varit med och byggt ett ballongburet instrument för att mäta polariserad röntgenstrålning från astronomiska objekt, som tex den så kallade *Krabbnebulosan*, ett expanderande moln av gas som utgör resterna efter en supernova, en stjärna som exploderade 4 juli år 1054.

- (a) Instrumentet, som heter XL-Calibur, lyfte från Esrange Space Center utanför Kiruna den 9:e juli 2024 och landade efter fem dagars flygning på ca 40 km höjd i Kugluktuk, Kanada. Under flygningen mätte XL-calibur röntgenstrålning med energier mellan 19–64 keV – vilket våglängdsintervall motsvarar detta? [2p]

⇒ Lösningförslag: Energin och våglängden är kopplade via

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

vilket för de givna energierna ger våglängder mellan 19–63 pm.

Ett vanligt misstag här var att många inte kunde prefixen, och svarade nanometer eller mikrometer, fast svaret var rätt angivet i meter. Detta trots att prefixen (för första gången!) var med i formelsamlingen i år! Jag var dock förlåtande här, så länge inte svaren var orimliga (svar i hundratals nanometer, som ni ska veta är i det synliga våglängdsintervallet, gav avdrag).

- (b) Comptonspridning sker mellan en foton och en elektron. Rita upp ett diagram för processen om en foton träffar en fri elektron i vila, och definiera vinklarna och energierna. Beräkna den maximala energin en foton i intervallet i a) kan uppmätas med efter spridning med 45 grader. [3p]

⇒ Lösningförslag: Relationen mellan energierna för de inkommande och spridda fotonerna och spridningsvinkeln ges av

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2}.$$

Om vi löser ut E' och stoppar in $\theta = 45^\circ$ och $E = 64$ keV fås $E' = 61.7$ keV ≈ 62 keV.

Uppgift 5

Vågfunktionerna för de olika tillstånden som elektronen i en väteatom kan befinna sig i är kända och givna i formelsamlingen.

- (a) Om huvudkvanttalet $n = 3$, hur många möjliga kvanttillstånd kan elektronen befinna sig i? [1p]

⇒ Lösningförslag: Om vi har $n = 3$ kan $l = 0, 1, 2$, $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$, och $m_s = \pm 1/2$. Vi får alltså följande möjliga värden:

n	l	m_l
3	0	0
3	1	0
3	1	-1
3	1	+1
3	2	0
3	2	-1
3	2	+1
3	2	-2
3	2	+2

För varje av de 9 kombinationerna av n , l , och m_l i tabellen ovan kan m_s ha två värden. För $n = 3$ har vi alltså totalt 18 möjliga kvanttillstånd.

Vanligt misstag: $n = 3 \Rightarrow l = 0, 1, 2 \Rightarrow m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, så vi har $3 \times 5 = 15$ möjliga tillstånd, och för varje två spinnmöjligheter, så 30 totalt. Felet här är att $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, dvs för fallet med $n = 3, l = 0$ måste $m_l = 0$ (dvs ett tillstånd), och om $n = 3, l = 1$ kan vi ha $m_l = 0, \pm 1$ (dvs tre tillstånd).

- (b) En väteatom i sitt grundtillstånd absorberar en foton med $\lambda = 121,6$ nm. Bestäm huvudkvanttalet n för tillståndet som elektronen nu befinner sig i. Givet att fotonen är en boson med spinn $s = 1$, vad kan sägas om värdet på bankvanttalet l för det exciterade tillståndet? [2p]

⇒ Lösningförslag: Energin som förs över från fotonen till väteatomen ges av

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4,13570 \times 10^{-15} \text{ eVs} \times 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}}{121,6 \times 10^{-9} \text{ m}} \approx 10,2 \text{ eV} \quad (17)$$

och denna energi finns tillgänglig för att excitera väteatomen. Vi har nu

$$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \Rightarrow E_1 = -13,6 \text{ eV}, E_2 = -3,4 \text{ eV}, E_3 = -1,5 \text{ eV}, \dots \quad (18)$$

som ger oss att det exciterade tillståndet med $n = 2$ kan nås precis genom att fotonen absorberas.

Vad gäller l vet vi att $n = 1 \Rightarrow l = 0$ i grundtillståndet. Eftersom det rörelsemängdsmomentet $J = L + S$ måste bevaras, ger fotonens spinn kvanttalet bli $l = 1$.

- (c) Bestäm ett uttryck för den mest sannolika radien där elektronen i det exciterade tillståndet kan befinna sig. [2p]

⇒ Lösningförslag: Den mest sannolika radien ges av att derivera sannolikhetsstäthetsfunktionen med avseende på R , och se var denna har maximum. Som bakgrund för detta är det bra att tänka på var detta kommer ifrån (se avsnitt 7.7 i Harris om den radiella sannolikheten för väteatomen för mer detaljer):

$$\int_V |\psi^* \psi|^2 dV = \int_{r=0}^{r=\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_0^{2\pi} R^2(r) \Theta^2(\theta) r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = 1 \quad (19)$$

Detta uttryck kan faktoriseras till en r -beroende faktor och en θ -beroende faktor, som var och en normaliseras. Den radiella sannolikheten ges av:

$$P(r) = r^2 |R(r)|^2 = r^2 |R_{2,1}(r)|^2 = r^2 \frac{1}{(2a_0)^3} \frac{r^2}{3a_0^2} e^{-r/a_0} = \frac{r^4}{24a_0^5} e^{-r/a_0} \quad (20)$$

Vi kan nu derivera detta uttryck för att hitta maximum:

$$\frac{d}{dr} P(r) = \frac{1}{24a_0^5} \frac{d}{dr} (r^4 e^{-r/a_0}) = \quad (21)$$

$$= \frac{1}{24a_0^5} \left[4r^3 e^{-r/a_0} + r^4 \left(-\frac{1}{a_0} \right) e^{-r/a_0} \right] = \quad (22)$$

$$= \frac{e^{-r/a_0}}{24a_0^5} \left[4r^3 - \frac{r^4}{a_0} \right] = 0 \quad (23)$$

$$\Rightarrow 4r^3 - \frac{r^4}{a_0} = 0 \Rightarrow r = 4a_0 \quad (24)$$

Den mest sannolika radien för elektronen att befinna sig vid är alltså $4a_0$.

Uppgift 6

I ett laboratorium på KTH finns en liten bit Kalifornium (^{252}Cf) placerad i en stor vattentank. Denna utsöndrar neutroner som effektivt bromsas in i vattnet, till nära vila, innan de absorberas av väteatomerna i vattnet eller i omgivande material. Genom absorption i väte bildas isotopen deuterium (^2H). Deuteriumatomkärnan bildas i sitt grundtillstånd och den överblivna energin skickas ut i form av en gammafoton.

- (a) Vilken energi (uttryckt i keV) har dessa fotoner? [2p]

⇒ Lösningförslag: Processen är $^1\text{H} + n \rightarrow ^2\text{H}$. Energibevarande ger oss

$$E_k(^1\text{H}) + E_k(n) + (m(^1\text{H}) + m(n))c^2 = E_k(^2\text{H}) + m(^2\text{H})c^2 + E_\gamma. \quad (25)$$

Enligt uppgiften saktar neutronerna in till nära vila innan de absorberas, så vi kan anta att den kinetiska energin för kärnorna och neutronen är försumbar, och vi har då kvar

$$E_\gamma = (m(^1\text{H}) + m(n) - m(^2\text{H}))c^2 \approx 2.23 \text{ MeV} \quad (26)$$

- (b) Om deuteriumkärnorna i sin tur absorberar neutroner bildas tritium (^3H) som sönderfaller med en halveringstid på 12,3 år. Vilket sönderfallskedja är rimlig för tritium, och vilken stabil kärna bildas? [3p]

⇒ Lösningförslag: Vilka sönderfallsprocesser är möjliga?

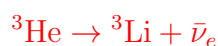
- α -sönderfall: inte möjligt eftersom masstalet för ^3H är för litet för att kunna skapa en ^4He -kärna.
- β^+ -sönderfall är inte möjligt eftersom det skulle kräva att en proton omvandlas till en neutron (och skickar ut en positron och en neutrino), men det finns bara en proton, och uppgiften säger att det ska bli en kärna i sluttillståndet.
- β^- -sönderfall är däremot möjligt, då ^3H har gott om neutroner som kan omvandlas till protoner via $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, dvs vi får här



Denna process sker spontant eftersom Q -värdet är positivt:

$$Q = \Delta mc^2 = (m(^3\text{H}) - m(^3\text{He}))c^2 \approx 0,00002 \text{ u } c^2 > 0. \quad (27)$$

Vi ser att även ^3He har för lågt masstal att genomgå α -sönderfall, och ett β^+ -sönderfall skulle pga beräkningen ovan *kräva* energi, dvs förbjudet. Slutligen skulle ett ytterligare β^- -sönderfall ge oss



vilket skulle kunna ske om masskillnaden tillåter det:

$$\Delta E = \Delta mc^2 = (m(^3\text{He}) - m(^3\text{Li}))c^2 \approx -0,015uc^2, \quad (28)$$

dvs inte tillåtet. Eftersom inga av dessa sönderfall är möjliga är ^3He sannolikt stabil, och vi kan sluta oss till att det är rätt kärna.

Obs! Weizsäckers formel är inte lämplig att använda i denna uppgift.

Uppgift 7

Astrofysikern Josefin studerar absorptionsspektrumet för kolmonoxid i ljuset från en avlägsen nebulosa. En tydlig absorptionslinje syns vid fotonenergin 0,265 eV, och Josefin vet att denna linje motsvarar övergången mellan två vibrationstillstånd, $V = 0 \rightarrow V = 1$.

- (a) Ta fram det generella uttrycket för $\Delta E(V)$, dvs energiskillnaden mellan två på varandra följande vibrationsnivåer för en vibrerande moleky. [2p]

⇒ Lösningförslag: Vibrationsenergin ges i formelsamlingen av

$$E_{\text{vib}}(V) = (V + \frac{1}{2})h\nu_0 \quad (29)$$

vilket ger oss

$$\Delta E(V) = E_{\text{vib}}(V+1) - E_{\text{vib}}(V) = h\nu_0(V+1 + \frac{1}{2} - (V + \frac{1}{2})) = h\nu_0 = \hbar\sqrt{k/\mu}, \quad (30)$$

där k är fjäderkonstanten och μ är den reducerade massan.

- (b) Hon observerar också en mycket svagare linje vid 0,259 eV, och Josefin undrar om detta kan bero på att en annan kolisotop än ^{12}C finns i nebulosan. De två vanligast förekommande isotoperna för kol och syre är ^{12}C respektive ^{16}O . Bestäm vilken isotop (på formen ^XA) det är. [3p]

⇒ Lösningförslag: Absorptionslinjen med $\Delta E = 0,265$ eV vet vi kommer från övergången $V = 0 \rightarrow V = 1$ för kolmonoxid gjort på ^{12}C och ^{16}O , så vi kan bestämma fjäderkonstanten:

$$\Delta E = \hbar\sqrt{k/\mu} \Rightarrow k = \left(\frac{\Delta E}{\hbar}\right)^2 \mu, \quad (31)$$

där $\mu = \frac{m_{\text{C}}m_{\text{O}}}{m_{\text{C}}+m_{\text{O}}} = \frac{12u \cdot 16u}{12u+16u} \approx .6,857$ u, vilket ger oss

$$k = \left(\frac{0,265 \text{ [eV]} \cdot 2\pi}{4,1357 \times 10^{-15} \text{ [eVs]}}\right)^2 \cdot 6,857 \text{ [u]} \approx 1,111 \times 10^{30} \text{ u/s}^2. \quad (32)$$

Den andra absorptionslinjen motsvarar $\Delta E_2 = 0.259$ eV, och antas också komma från CO, men med en annan kolisotop än ^{12}C . Om vi antar att fjäderkonstanten inte påverkas av kolisotopen kan vi sätta upp ett uttryck för den reducerade massan μ_2 och räkna ut vilken atommassa X den okända kolisotopen ^XA har:

$$\mu_2 = \frac{k}{(\Delta E_2/\hbar)^2} = \dots \approx 7,18 \text{ u} \quad (33)$$

$$\mu_2 = \frac{16 \cdot X}{16 + X} \Rightarrow 16\mu_2 = (16 - \mu_2)X \Rightarrow X = \frac{16\mu_2}{16 - \mu_2} \approx 13,02 \text{ u} \quad (34)$$

Detta ger oss att den svagare absorptionslinjen kommer från kolmonoxid med kolisotopen ^{13}C .

Uppgift 8

Nobelpriset i fysik tilldelades 2025 Clarke, Devoret och Martinis “för upptäckten av makroskopisk kvantmekanisk tunnling och energikvantisering i en elektrisk krets”. Tunnling är ett kvantmekaniskt fenomen som nu utnyttjas i tillämpningar som fasttillståndsdiskar för lagring i datorer, dioder, svepelektronmikroskop, och kvantdatorer. Effekten kan sammanfattas med att ett objekt, tex en partikel, kan ta sig igenom en potentialbarriär som den enligt klassisk fysik inte borde kunna penetrera.

Låt oss undersöka ett fall av tunnling i en dimension. En elektron rör sig fritt i positiv x -led och träffar på en rektangulär potentialbarriär med energin 5 eV och längden 12 Å. Hitta en elektronenergi i intervallet 7–9 eV för vilken vi inte får någon reflektion alls. [5p]

⇒ Lösningförslag: Från formelbladet har vi följande uttryck för reflektionskoefficienten:

$$R = \frac{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right]}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)} \quad (35)$$

För att $R = 0$ måste alltså:

$$\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] = 0 \quad (36)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

$$\Rightarrow E - U_0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (38)$$

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} + U_0 \quad (39)$$

Nu kan vi sätta in värdena $m = m_e$, $a = 12 \times 10^{-10}$ m, $U_0 = 5$ eV, och får:

$$E \approx 0.26113 \times n^2 + 5 \text{ [eV]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

Test av olika n ger:

n	E [eV]
0	5,00
1	5,26
2	6,04
3	7,35
4	9,18

Endast $E_3 = 7,35$ eV uppfyller kraven.

SH1014 Modern fysik: Formler och konstanter

Version 3.7

Naturkonstanter

Ljusets hastighet i vakuum	c	$2,99792458 \cdot 10^8$ m/s
Elektronens laddning	e	$1,6021766 \cdot 10^{-19}$ C
Dielektricitetskonst. i vakuum	ε_0	$8,854187 \cdot 10^{-12}$ F/m
Permeabiliteten i vakuum	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A ²
Plancks konstant	h	$6,62618 \cdot 10^{-34}$ J·s = $4,13570 \cdot 10^{-15}$ eV·s
Boltzmanns konstant	k_B	$1,38065 \cdot 10^{-23}$ J/K
Avogadros tal	N_A	$6,022045 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹
$1/4\pi\varepsilon_0$		$8,98755 \cdot 10^9$ Nm ² /C ²

Vilomassor

Partiklar:

	u [atomär massenhet]	MeV/c ²
Elektron	$5,485803 \cdot 10^{-4}$	0,511003
Proton	1,00727647	938,280
Neutron	1,00866501	939,573
Deutron	2,01355321	1875,628
Alfapartikel	4,00150618	3727,409
π^+, π^-		139,570
π^0		134,977

Atomer:

	u [atomär massenhet]
¹ H	1,007825
² H	2,014101
³ H	3,016049
⁴ H	4,027806
³ He	3,016029
⁴ He	4,002603
⁵ He	5,012223
³ Li	3,030775
⁴ Li	4,027185
⁵ Li	5,012537
⁸ C	8.037675
⁹ C	9.031036
¹⁰ C	10.016853
¹¹ C	11.011433
¹² C	12,000000
¹³ C	13.003354
¹⁴ C	14.003241
¹⁴ N	14,003074
¹⁶ O	15,994914

Omvandlingsfaktorer och enheter

1 eV = 1,6021766 · 10 ⁻¹⁹ J
1 b [barn] = 10 ⁻²⁸ m ²
1 u = 931,502 MeV/c ² = 1,660566 · 10 ⁻²⁷ kg
1 Bq = 1 sönderfall/s
1 Ci = 3,7 · 10 ¹⁰ Bq
1 Å [Ångström] = 1 · 10 ⁻¹⁰ m

Prefix:

exa	E	10 ¹⁸
peta	P	10 ¹⁵
tera	T	10 ¹²
giga	G	10 ⁹
mega	M	10 ⁶
kilo	k	10 ³
–		10 ⁰
milli	m	10 ⁻³
mikro	μ	10 ⁻⁶
nano	n	10 ⁻⁹
piko	p	10 ⁻¹²
femto	f	10 ⁻¹⁵
atto	a	10 ⁻¹⁸

Några matematiska formler

Följande integraler kan vara användbara:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^m e^{-br} dr &= \frac{m!}{b^{m+1}} \\ \int_0^\infty e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \\ \int_0^\infty x e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{2b} \\ \int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}\end{aligned}$$

Speciell relativitetsteori

Lorentztransformationen

I inertialsystemet S rör sig inertialsystemet S' med hastigheten v längs med x -axeln. Systemens origo O resp. O' sammanfaller då tiden i båda systemen är noll, dvs då $t = t' = 0$.

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

Den inversa Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\end{aligned}$$

Dopplereffekten

Observerad frekvens f på ljuset då det utsänds från en ljuskälla som i sitt system har ljusfrekvensen f_0 då ljuskällan färdas med hastigheten v i vinkeln θ mot observatören. $\theta = 0$ motsvarar att källan rör sig *rakt ifrån* observatören.

$$f = \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c} \cos \theta)}$$

Hastighetstransformationer

Transformation av hastigheter mellan S' och S :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)} \\u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)}\end{aligned}$$

Samband mellan rörelsemängd och energi

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Vågor och partiklar

Plancks strålningslag

$$\begin{aligned}I(\nu, T) &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} \quad [\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}] \\I(\lambda, T) &= \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1} \quad [\text{Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}]\end{aligned}$$

Wiens förskjutningslag

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} [m \cdot K]}{T [K]}$$

Comptonspridning

Då en inkommande foton med våglängden λ sprids (i vinkeln θ) mot en stillastående elektron så gäller

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

där λ' är våglängden för den spridda fotonen. För fotonenergierna gäller på motsvarande sätt

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2}.$$

Kvantmekanik

Den tidsberoende endimensionella Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Normaliseringsvillkor i en dimension:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

Oändlig endim. lådpotential, lösning

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \left[\hbar = \frac{h}{2\pi} \right] = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Potential för harmonisk oscillator (endim.)

Potential: $U(x) = \kappa x^2/2$.

Lösning:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$.

Potentialbarriärer

Transmissionssannolikheten och reflektionssannolikheten vid en potentialbarriär beror av energin U_0 , dess längd a och den inkommande partikelns energin E .

Om $E > U_0$ så har vi:

$$R = \frac{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right]}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)}$$
$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)}$$

Om $E < U_0$ så har vi:

$$R = \frac{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right]}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}$$
$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}$$

Tunnling genom bred potential:

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} (1 - E/U_0) e^{-2a\sqrt{2m(U_0-E)}/\hbar} \quad ; \text{ om } a \gg \frac{1}{\alpha},$$

$$\text{där } \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}.$$

Operatorer

Exempel på operatorer (endim.):

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$
$$\hat{x} = x$$
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x).$$

Den tidsberoende Schrödingerekvationen i operatorform:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

Väntevärde och osäkerhet

Väntevärdet $\overline{Q}$ för observabeln Q :

$$\overline{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \hat{Q} \Psi(x,t) dx$$

Osäkerheten ΔQ för en observabel Q :

$$\Delta Q = \sqrt{\overline{(Q^2)} - (\overline{Q})^2}$$

Väteatomen

Coulombpotential från punktkälla/proton:

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Kvanttal i lösningen för väteatomen

- huvudkvanttal, $n = 1, 2, 3, \dots$
- bankvanttal, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$
- magnetiskt kvanttal, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
- spinnmagnetiskt kvanttal, $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Vätelika atomer - energier

$$E_n = \frac{-m_e e^4 Z^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

där Z är antalet protoner i atomkärnan ($Z = 1$ för väte).

Väteatomen - vågfunktioner

Vinkeldel

$$\Phi(\phi) = e^{im_l\phi}, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
$$\Theta(\theta) = P_l^{m_l}(\cos\theta) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$
$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

l, m_l	$\Theta(\theta)_{l,m_l} \cdot \Phi_{m_l}(\phi) = Y_l^{m_l}$
0,0	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
1,0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
1,±1	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$

Radiell del

n, l	$R_{nl}(r)$
1,0	$\frac{1}{a_0^{3/2}} 2e^{-r/a_0}$
2,0	$\frac{2}{(2a_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-r/2a_0}$
2,1	$\frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{\sqrt{3} \cdot a_0} e^{-r/2a_0}$

Bohrradien a_0 skrivs:

$$a_0 = \frac{(4\pi\epsilon_0)\hbar^2}{me^2}$$

Med insatta naturkonstanter får vi $a_0 = 0.0529 \cdot 10^{-9}$ m.

Kvantiserat rörelsemängdsmoment

$|L| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ $l = 0,1,2, \dots, n-1$ $L_z = m_l\hbar$ $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ $|S| = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ $s = \frac{1}{2} \text{ (elektron)}$ $S_z = m_s\hbar$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Magnetiskt dipolmoment

Magnetisk dipolmoment från banrörelse:

$$\bar{\mu}_L = -\frac{e}{2m_e}\bar{L}.$$

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e}L_z$$

Magnetisk dipolmoment från spinn:

$$\bar{\mu}_S = -g_s\frac{e}{2m_e}\bar{S}$$

Totalt magnetisk dipolmoment:

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_L + \bar{\mu}_S = -\frac{e}{2m}(\bar{L} + g_s\bar{S})$$

Potentiell energi för en magnetisk dipol, μ , i ett yttre magnetiskt fält, $\bar{B} = B_z$:

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} = -\mu_z B$$

Spinn-ban-koppling

Magnetfältet som elektronen upplever från banrörelsen:

$$\bar{B}_L = \frac{\mu_0 e}{4\pi m_e r^3}\bar{L}, \tag{1}$$

Energiskift, ΔU :

$$\Delta U = \bar{\mu}_s \cdot \bar{B}_L = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e^2 r^3}(\bar{S} \cdot \bar{L}) \tag{2}$$

Spektroskopisk notation

- s** för $l = 0$
- p** för $l = 1$
- d** för $l = 2$
- f** för $l = 3$
- g** för $l = 4$
- h** för $l = 5$.

Molekylfysik

Reducerad massa:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Rotationsenergier:

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1) \qquad J = 0,1,2,3, \dots,$$

där tröghetsmomentet $I = \mu R^2$.

Vibrationsenergier:

$$E_{\text{vib}} = (V + \frac{1}{2})h\nu_0 \qquad V = 0,1,2,3, \dots,$$

där $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/\mu}$.

Fasta tillståndets fysik

Fermi-Dirac-fördelningen:

$$N(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mathcal{E}_F)/k_B T} + 1}$$

Effektiv massa:

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left(\frac{d^2 \mathcal{E}}{dk^2} \right)^{-1}$$

Partikelfysik

Standardmodellen i tabellform:

	Fermioner				
Kvarkar	u upp	c charm	t topp	γ foton	H Higgs
	d ner	s sär	b botten	g gluon	Bosoner
	ν_e elektron-neutrino	ν_μ myon-neutrino	ν_τ tau-neutrino	Z_0 Z-boson	
	e elektron	μ myon	τ tauon	$W^\pm$ W-boson	

Periodiska systemet

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Grundämne Nr Väte 1 H																	Helium 2 He
Litium 3 Li	Beryllium 4 Be	grundämnets namn atomnummer Symbol															
Natrium 11 Na	Magnesium 12 Mg											Aluminium 13 Al	Kisel 14 Si	Fosfor 15 P	Svavel 16 S	Klor 17 Cl	Neon 10 Ne
Kalium 19 K	Kalcium 20 Ca	Skandium 21 Sc	Titan 22 Ti	Vanadin 23 V	Krom 24 Cr	Mangan 25 Mn	Järn 26 Fe	Kobolt 27 Co	Nickel 28 Ni	Koppar 29 Cu	Zink 30 Zn	Gallium 31 Ga	Germanium 32 Ge	Arsenik 33 As	Selen 34 Se	Brom 35 Br	Krypton 36 Kr
Rubidium 37 Rb	Strontium 38 Sr	Yttrium 39 Y	Zirkonium 40 Zr	Niob 41 Nb	Molybden 42 Mo	Teknetium 43 Tc	Rutenium 44 Ru	Rodium 45 Rh	Palladium 46 Pd	Silver 47 Ag	Kadmium 48 Cd	Indium 49 In	Tenn 50 Sn	Antimon 51 Sb	Tellur 52 Te	Jod 53 I	Xenon 54 Xe
Cesium 55 Cs	Barium 56 Ba	Lutetium 71 Lu	Hafnium 72 Hf	Tantal 73 Ta	Volfram 74 W	Rhenium 75 Re	Osmium 76 Os	Iridium 77 Ir	Platina 78 Pt	Guld 79 Au	Kviksilver 80 Hg	Tallium 81 Tl	Bly 82 Pb	Vismut 83 Bi	Polonium 84 Po	Ättat 85 At	Radon 86 Rn
Francium 87 Fr	Radium 88 Ra	Lawrencium 103 Lr	Rutherfordium 104 Rf	Dubnium 105 Db	Seaborgium 106 Sg	Bohrium 107 Bh	Hassium 108 Hs	Meitnerium 109 Mt	Darmstadtium 110 Ds	Röntgenium 111 Rg	Copernicium 112 Cn	Nihonium 113 Nh	Flerovium 114 Fl	Moskovium 115 Mc	Livermorium 116 Lv	Tennes 117 Ts	Oganesson 118 Og

Lantan 57 La	Cerium 58 Ce	Praseodym 59 Pr	Neodym 60 Nd	Prometium 61 Pm	Samarium 62 Sm	Europium 63 Eu	Gadolinium 64 Gd	Terbium 65 Tb	Dysprosium 66 Dy	Holmium 67 Ho	Erbium 68 Er	Tulium 69 Tm	Ytterbium 70 Yb
Aktinium 89 Ac	Torium 90 Th	Protaktinium 91 Pa	Uran 92 U	Neptunium 93 Np	Plutonium 94 Pu	Americium 95 Am	Curium 96 Cm	Berkelium 97 Bk	Californium 98 Cf	Einsteinium 99 Es	Fermium 100 Fm	Mendelevium 101 Md	Nobelium 102 No