

Tentamen del 2

Numeriska metoder SF1544 och BE3003

8.00-11.00 5/6 2019

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Det finns två varianter av uppgift 2. Endast en av dem får lösas.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

1. Vi önskar lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned}x^3 + y &= 0.7, \\ x^2 / \cos y &= 0.2,\end{aligned}$$

med Newtons metod.

- (a) (7p) Kan startpunkten $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ge konvergens till en lösning av ekvationssystemet? Motivera ditt svar.
- (b) (10p) Skriv ett Matlab-program som använder startpunkten $(x_0, y_0) = (1, 1)$ och bestämmer en lösning till ekvationssystemet med ett fel mindre än 10^{-8} i både x och y .

(a) *Ekvationssystemet kan skrivas $\mathbf{f}(x, y) = 0$, där*

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + y - 0.7 \\ x^2 / \cos y - 0.2 \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen till $\mathbf{f}$ ges av

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 2x / \cos y & x^2 \sin y / \cos^2 y \end{pmatrix}.$$

Evaluerad i startpunkten $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ger

$$\mathbf{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

och

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I första steget av Newtons metod ska ekvationssystemet $J(x_0, y_0)\mathbf{h} = \mathbf{f}(x_0, y_0)$ lösas. Eftersom detta ekvationssystem saknar lösning kan denna startpunkt inte ge konvergens.

(b) *Ett Matlab-program ges av*

```

z=[1;1]; %Initialisering
zold=[0;0]; %Initialisering

while norm(z-zold,inf)>1e-8
    zold=z;
    z=z-[3*z(1)^2 1; 2*z(1)/cos(z(2)) z(1)^2*sin(z(2))/(cos(z(2)))^2]...
        \[z(1)^3+z(2)-0.7; z(1)^2/cos(z(2))-0.2];
end

disp(['x=', num2str(z(1)), ' y=', num2str(z(2))])

```

2a. (6p) Bestäm ett polynom som interpolerar punkterna i tabellen

x	0	1	2
y	3	2	4

2b. (9p) Givet tabellvärdena

x	0	1
y	3	2

vill man hitta ett tredjegradspolynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ som interpolerar punkterna i tabellen, och som dessutom gör att funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definierad av $f(x) = p(x)$ för $0 \leq x < 3$ och $f(x+3) = f(x)$ för alla x , uppfyller att f är kontinuerlig och deriverbar överallt. Ställ upp ett ekvationssystem som ger koefficienterna för polynomet p . Du behöver inte lösa ekvationssystemet för hand.

(a) Med Newtons ansats ges andragradspolynomet av $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x(x-1)$. Bestämning av dess koefficienter görs genom insättning av interpolationspunkterna:

$$p(0) = a_0 = 3,$$

$$p(1) = a_0 + a_1 = 2 \implies a_1 = -1,$$

$$p(2) = a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 4 \implies a_2 = \frac{3}{2}.$$

(b) För att funktionen f ska få de önskade egenskaperna krävs att $p(0) = 3$, $p(1) = 2$, $p(3) = 3$ och $p'(0) = p'(3)$. Detta ger upphov till ekvationssystemet

$$p(0) = 3 : a_0 = 3,$$

$$p(1) = 2 : a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2,$$

$$p(3) = 3 : a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3,$$

$$p'(0) = p'(3) : a_1 = a_1 + 6a_2 + 27a_3.$$

Alternativ uppgift 2 (15p) Formulera och bevisa en sats om konditionstal för lösning av linjära ekvationssystem.

3. Denna uppgift handlar om approximation av lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) = \sqrt{t}, \quad y(0) = 0,$$

med Eulers metod.

- (a) (9p) Låt y_N vara approximationen av $y(1)$ då N lika långa steg med metoden Framåt Euler används. Gör en feluppskattning, dvs. bestäm en funktion $e(h)$ sådan att

$$|y_N - y(1)| \leq e(h),$$

där $h = 1/N$ är den konstanta steglängden. För full poäng krävs att $e(1/100) \leq 0.02$.
Tips: För analysen kan det vara användbart att i tillägg till metoden Framåt Euler även betrakta Bakåt Euler.

- (b) (9p) Om $y(1)$ ska approximeras med två steg med metoden Framåt Euler, hur ska dessa steg väljas för att felet $|y_N - y(1)|$ ska bli så litet som möjligt?

(a) *Framåt Eulerlösningen uppfyller*

$$y_N = h(f(t_0) + f(t_1) + \dots + f(t_{N-1}))$$

där $t_i = i \cdot h$ och $f(t) := \sqrt{t}$. Detta är en Riemannsumma med evalueringar i vänstra ändpunkten av delintervallen som approximerar integralen

$$I := \int_0^1 f(t) dt.$$

För motsvarande Bakåt Euler-lösning y_N^{BE} gäller

$$y_N^{BE} = h(f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_N)).$$

Detta är en Riemannsumma som approximerar I med funktionsevalueringar i delintervallens högra ändpunkter. Eftersom f är en växande funktion gäller

$$y_N \leq I \leq y_N^{BE}.$$

Därför uppfyller felet

$$0 \leq I - y_N \leq y_N^{BE} - y_N = h,$$

där den sista likheten följer direkt från uttrycken för y_N och y_N^{BE} . Vi kan alltså låta $e(h) = h$.

(b) Beteckna längden av första Framåt Euler-steget med h . Längden av andra steget blir därmed $1 - h$. Framåt Euler-approximationen blir därmed (med antal steg $N = 2$),

$$y_2 = \sqrt{h}(1 - h).$$

Eftersom $I - y_2 \geq 0$ för alla $0 < h < 1$ gäller att felet minimeras för den steglängd h som maximerar y_2 . Genom att derivera uttrycket med avseende på h får vi att det optimala valet av h uppfyller

$$\frac{1}{2\sqrt{h}} - \frac{3}{2}\sqrt{h} = 0,$$

dvs. $h = 1/3$.