

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Måndag 2022-12-19 kl 14:00-19:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Fullständiga lösningar ska ges på samtliga problem
OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor

Hjälpmedel Miniräknare, linjal

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. Uppskatta hur många liter bränsle som totalt skulle sparas per år om alla bilar i Sverige kör med släckta lysen. Bränslet kan vara bensin eller diesel med energiinnehåll ca 10 kWh/liter.

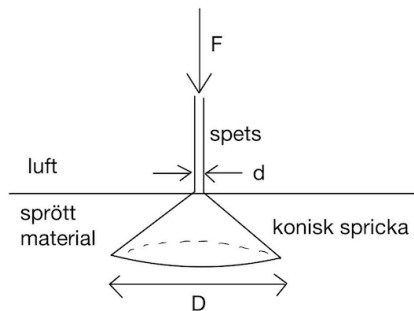
2. I ett rum med volymen 20.0 m^3 finns 1.0 kg is med temperaturen $0.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Om rummets starttemperatur är $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ och trycket är 1.0 atm , vad blir rummets sluttemperatur på grund av isens smältning? Antag att rummet är värmeisolerat och att värme endast överförs mellan luft och is.

3. En gjutjärnskamin värmer ett stort rum med effekten 2.00 kW . Antag att rumstemperaturen är $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$, kaminens yta har arean 2.00 m^2 , och att gjutjärnets emissivitet är $\varepsilon = 0.44$. Bestäm kaminens yttemperatur. Svara i grader Celsius.

4. En glödlampa har en glödtråd av tungsten som har 1.0 mm diameter och är 25 mm lång. Tungsten har värmekapacitet $c = 132 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ och densitet $\rho = 19300 \text{ kg}/\text{m}^3$. Bestäm temperaturökningen per sekund i glödtråden vid tiden när strömmen 0.45 A läggs på genom lampan vid spänningen 220 V . Effekt ges av produkten av spänning och ström.

VÄND!

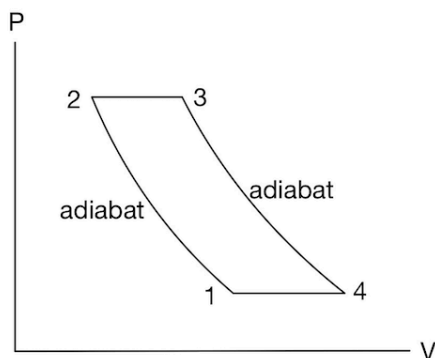
5. En spröd yta av tex glas som utsätts för tryck från en vass spets spricker typiskt med en konisk spricka som utbreder sig från kontaktpunkten och in i materialet, se figuren. Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för diametern D hos sprickan. Antag att D beror på kraften F , brottsegheten K som i teorin för spröda sprickor ges av $K \propto P\sqrt{d}$ där P är trycket och d är diametern hos spetsen, samt Poissonkvoten ν som är minus förhållandet mellan materialets längdändringar i rät vinkel mot kraften och i kraftens riktning.



6. En cylinder innehåller två delvolymmer som avdelas av en partition dvs en vägg. Delvolym 1 innehåller 1.0 kmol O_2 och delvolym 2 innehåller 2.0 kmol N_2 . Temperaturen är $20^\circ C$ och trycket är 1.0 atm i båda delvolymerna. Partitionen tas plötsligt bort och gaserna blandas.

- Bestäm partialtrycken hos gaserna efter blandningen.
- Visa att entropiändringen i blandningsprocessen kan uttryckas i partialtrycken och bestäm sammanlagda entropiändringen.

7. Bestäm verkningsgraden för en Brayton-cykel, se figuren. Antag att arbetsgasen är ideal. Svaret ska uttryckas i bland annat tryckkvoten $r = P_2/P_1$ och förenklas maximalt.



8. Clausius-Clapeyrons relation beskriver lutningen hos en fasövergångskurva som separerar två faser i ett PT-diagram:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta V}$$

där L är latent värmet och ΔV är volymsändringen hos systemet vid fasövergången.. Konstruera uttrycket med hjälp av Gibbs fria energi.

LYCKA TILL!

FORMELBLAD I TERMODYNAMIK

Boltzmanns konstant	$k = 1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Gaskonstanten	$R = N_A k = 8.314 \text{ J/(K mol)}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Atomära massenheten	$u = 1.660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Plancks konstant	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Ljushastigheten	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Atmosfärstryck	$1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$
Atommassor m/u	H: 1, He: 4, C: 12, N: 14, O: 16, Ar: 40
Luft	ca 80% N_2 och 20% O_2
Stefan-Boltzmanns konstant	$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$
Solarkonstanten	$\varphi = 1.4 \text{ kW/m}^2$
Värmekapacitet för vatten vid 15°C	$c = 4.19 \text{ kJ/K kg}$
Förångningsentalpi vatten 100°C, 1 atm	2260 kJ/kg
Värmekapacitet för is vid -4 °C	$c = 2.2 \text{ kJ/K kg}$
Smältentalpi för is	333 kJ/kg
Pris för hushållsel inklusive skatt	1 kr/kWh
Människa effekt: vila/promenad/löpning	1/2/5 W/kg
Cirkelns omkrets och area	$2\pi R$ och πR^2
Sfärens area och volym	$4\pi R^2$ och $4\pi R^3/3$
Logaritmer	$\ln ab = \ln a + \ln b, \ln a/b = \ln a - \ln b$ $d \ln x / dx = 1/x, \int 1/x dx = \ln x$ $x = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$
Lösningar till $x^2 + px + q = 0$	
Kinetisk energi	$E_K = \frac{1}{2}mv^2$
Gravitationell potentiell energi	$E_P = mgh, g = 9.8 \text{ m/s}^2$
Effekt=energi per tidsenhet	dE/dt
Tryck	$P = F/A$
Arbete	$dW = -PdV$
Ideal gas	$PV = NkT = nRT$
Monoatomär ideal gas	$U = \frac{3}{2}NkT$
Diatomär ideal gas	$U = \frac{5}{2}NkT$
Van der Waals tillståndsekvation	$P = NkT/(V - Nb) - a(N/V)^2$
Van der Waals tillståndsekvation 1 mol	$(P + a_0/v^2)(v - b_0) = RT, a_0 = aN_A^2, b_0 = bN_A$
Isoterm kompressibilitet	$\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial P)_T$
Isobar volymutvidgningskoefficient	$\alpha_V = (1/V)(\partial V/\partial T)_P$
Boltzmannfördelningen	$n_i = \text{konstant} \cdot \exp(-E_i/kT)$
Maxwell-Boltzmanns hastighetsfördelning	$f^3(v) = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}v^2 \exp(-mv^2/2kT)$
MB fördelning av hastighetskomponent	$f^1(v_x) = \sqrt{m/2\pi kT} \exp(-mv_x^2/2kT)$
Medelhastighet	$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/m\pi}$
Medelkvadrathastighet	$\langle v^2 \rangle = 3kT/m$
Mest sannolika hastighet	$v_p = \sqrt{2kT/m}$
Kollisionstid	$\tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2}\langle v \rangle)$
Medelfri väg	$l = \langle v \rangle \tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2})$
Stöttal	$\nu = P/\sqrt{2\pi mkT}$

Värmeflöde	$\Phi = dQ/dt$
Värmeflödestäthet	$\varphi = \Phi/A$
Fouriers lag	$\Phi = -\lambda A \Delta T / \Delta x$
Konvektion	$\Phi = \alpha A (T_1 - T_2)$
Värmeöverföring genom vägg	$\Phi = U A \Delta T$
U-värde	$1/U = 1/\alpha + \Delta x/\lambda$
Plancks strålningslag	$u(f, T) = (8\pi h f^3 / c^3) / [\exp(hf/kT) - 1]$
Wiens förskjutningslag	$hf_{\max}/kT = 2.821$, $T\lambda_{\max} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Stefan-Boltzmanns lag	$\varphi = \sigma T^4$
Nettoflöde:	$\Phi = A\varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4)$
Första lagen	$dU = dQ + dW$
Isokor värmekapacitet	$C_V = (\partial Q / \partial T)_V$
Isobar värmekapacitet	$C_P = (\partial Q / \partial T)_P$
Monoatomär ideal gas:	$C_V = \frac{3}{2}Nk, C_P = C_V + Nk = \frac{5}{2}Nk$
Diatomär ideal gas:	$C_V = \frac{5}{2}Nk, C_P = \frac{7}{2}Nk$
En mol ideal gas	$c_P = c_V + R$
Adiabat	$PV^\gamma = \text{konstant}, \gamma = C_P/C_V$
Adiabat	$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konstant}$
Adiabatiskt arbete	$W = (P_2V_2 - P_1V_1)/(\gamma - 1)$
Verkningsgrad värmemaskin	$\eta = \Delta W /\Delta Q_1$
Carnotprocess	$\eta = 1 - T_2/T_1, \Delta Q_1/T_1 = \Delta Q_2/T_2$
Kylfaktor	$\varepsilon = \Delta Q_2/\Delta W$
Värmefaktor	$\varepsilon_v = \Delta Q_1/\Delta W$
Entropi	$S = k \ln \Omega$
Reversibel värmeöverföring	$dQ = TdS$
Irreversibel värmeöverföring	$dQ < TdS$
Entalpi	$H = U + PV$
Helmholtz fria energi	$F = U - TS$
Gibbs fria energi	$G = F + PV$

LÖSNINGAR

1. Uppskatta hur många liter bränsle som totalt skulle sparas per år om alla bilar i Sverige kör med släckta lysen. Bränslet kan vara bensin eller diesel med energiinnehåll ca 10 kWh/liter.

Antaganden: Energiinnehåll i bränslet 10 kWh/liter. Verkningsgrad vid elproduktion från motor och generator ca 30 %. Elenergin som fås ur en liter bränsle blir då $0.3 \cdot 10^4$ Wh/liter. Belysningens effekt är ca 100 W. Storleksordningen 10^6 bilar körs i genomsnitt 10^4 km/år med medelhastighet 50 km/h. Bränslet som åtgår för att driva belysningen blir då av storleksordningen

$$\frac{100 \text{ W} \cdot 10^6 \cdot (10^4 \text{ km/år}) / (50 \text{ km/h})}{0.3 \cdot 10^4 \text{ Wh/liter}} = 6.7 \cdot 10^6 \sim 10^7 \text{ liter/år}$$

Svar: Storleksordningen är 10 miljoner liter per år.

Kommentar: Detta är försumbart i jämförelse med dagsförbrukningen som i Sverige är ca 25 miljoner liter per dag.

2. I ett rum med volymen 20.0 m^3 finns 1.0 kg is med temperaturen $0.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Om rummets starttemperatur är $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ och trycket är 1.0 atm , vad blir rummets sluttemperatur på grund av isens smältning? Antag att rummet är värmeisolerat och att värme endast överförs mellan luft och is.

Latent värme för att smälta 1 kg is är

$$\Delta Q_{\text{is}} = 333 \text{ kJ/kg} \cdot 1 \text{ kg} = 333 \text{ kJ}$$

Eftersom värmeöverföring bara sker mellan luft och is blir

$$\Delta Q_{\text{luft}} = -\Delta Q_{\text{is}}$$

Luftens temperatursänkning ges av

$$\Delta T = \frac{\Delta Q_{\text{luft}}}{C_V} = \frac{\Delta Q_{\text{luft}}}{\frac{5}{2}Nk} = \frac{\Delta Q_{\text{luft}}}{\frac{5}{2}PV/T} = \frac{-333000}{\frac{5}{2} \cdot 101325 \cdot 20/293.15} = -19.27 \text{ K}$$

Luftens sluttemperatur blir

$$T = 20 + \Delta T = 0.73 \text{ }^\circ\text{C}$$

Svar: Luftens sluttemperatur blir $T = 0.7 \text{ }^\circ\text{C}$.

Kommentar: För att få rätt numeriskt svar bör man här räkna med alla siffror i tryck och temperatur.

Även lösning som innehåller C_P i stället för C_V accepteras: sluttemperatur $T = 6.2 \text{ }^\circ\text{C}$.

3. En gjutjärnskamin värmer ett stort rum med effekten 2.00 kW. Antag att rumstemperaturen är 20.0 °C, kaminens yta har arean 2.00 m², och att gjutjärnets emissivitet är $\varepsilon = 0.44$. Bestäm kaminens yttemperatur. Svara i grader Celsius.

Effekten från kaminen ges av värmeflödet av värmestrålningen. Stefan-Boltzmanns lag:

$$\frac{dQ}{dt} = \varepsilon A \sigma (T^4 - T_0^4)$$

där T är den sökta temperaturen och $T_0 = 20$ °C är temperaturen hos rummets väggar som ger instrålning till kaminen. Detta ger

$$T = \left(\frac{dQ/dt}{\varepsilon A \sigma} + T_0^4 \right)^{1/4} = 467 \text{ K} = 193 \text{ °C}$$

Svar: Kaminens yttemperatur blir $T = 193$ °C

4. En glödlampa har en glödtråd av tungsten som har 1.0 mm diameter och är 25 mm lång. Tungsten har värmekapacitet $c = 132 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ och densitet $\rho = 19300 \text{ kg}/\text{m}^3$. Bestäm temperaturökningen per sekund i glödtråden vid tiden när strömmen 0.45 A läggs på genom lampan vid spänningen 220 V. Effekt ges av produkten av spänning och ström.

Med $dQ = CdT$ kan effekten skrivas som

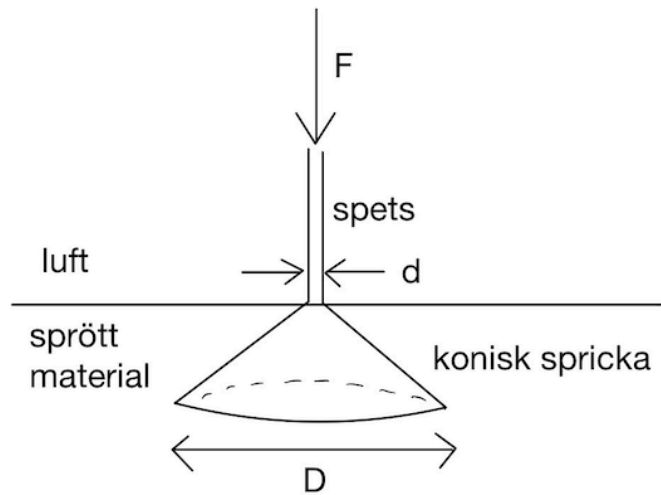
$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} = VI$$

där V är spänningen och I är strömmen. Med $C = mc$ fås

$$\frac{dT}{dt} = \frac{VI}{mc} = \frac{220 \cdot 0.45}{19300 \cdot 0.025 \cdot \pi \cdot (0.001/2)^2 \cdot 132} = 1979 \text{ K/s}$$

Svar: $dT/dt = 2000 \text{ K}$ per sekund.

5. En spröd yta av tex glas som utsätts för tryck från en vass spets spricker typiskt med en konisk spricka som utbreder sig från kontaktpunkten och in i materialet, se figuren. Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för diametern D hos sprickan. Antag att D beror på kraften F , brottsegheten K som i teorin för spröda sprickor ges av $K \propto P\sqrt{d}$ där P är trycket och d är diametern hos spetsen, samt Poissonkvoten ν som är minus förhållandet mellan materialets längdändringar i rät vinkel mot kraften och i kraftens riktning.



Dimensioner:

$$[D] = L$$

$$[K] = [P\sqrt{d}] = [F\sqrt{d}/d^2] = [F]L^{-3/2}$$

$$[\nu] = [-\Delta z/\Delta x] = L/L = 1 \text{ (dimensionslös)}$$

Eftersom $[F/K] = L^{3/2}$ fås direkt

$$D = (F/K)^{2/3} f(\nu)$$

där $f(\nu)$ är dimensionslös. Dvs

$$D \propto F^{2/3}$$

vilket stämmer bra med experiment.

6. En cylinder innehåller två delvolymmer som avdelas av en partition dvs en vägg. Delvolym 1 innehåller 1.0 kmol O₂ och delvolym 2 innehåller 2.0 kmol N₂. Temperaturen är 20 °C och trycket är 1.0 atm i båda delvolymerna. Partitionen tas plötsligt bort och gaserna blandas.

(a) Bestäm partialtrycken hos gaserna efter blandningen.

(b) Visa att entropiändringen i blandningsprocessen kan uttryckas i partialtrycken och bestäm sammanlagda entropiändringen.

(a) Antag ideala gaser. Slutvolymen V efter blandningen ges av summan av delvolymerna V_1 och V_2 innan blandningen:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{n_1 RT}{P} + \frac{n_2 RT}{P} = \frac{(n_1 + n_2) RT}{P}$$

Partialtrycket hos O₂ blir

$$P_1 = \frac{n_1 RT}{V} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} P = \frac{1}{1 + 2} P = 1/3 = 0.33 \text{ atm}$$

och hos N₂:

$$P_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} P = \frac{2}{1 + 2} P = 2/3 = 0.67 \text{ atm}$$

Totala trycket efter blandningen blir alltså oförändrat: $P = P_1 + P_2 = 1 \text{ atm}$.

Svar: $P_1 = 0.33 \text{ atm}$, $P_2 = 0.67 \text{ atm}$,

(b) Gaserna genomgår fri expansion. Entropiändringen i varje gas kan beräknas med hjälp av en kvasistatisk reversibel isoterm expansion. För O₂ blir

$$\Delta S_1 = \int_{V_1}^V \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^V \frac{-dW}{T} = \int_{V_1}^V \frac{PdV}{T} = n_1 R \int_{V_1}^V \frac{dV}{V} = n_1 R \ln \frac{V}{V_1}$$

För N₂ blir

$$\Delta S_2 = n_2 R \ln \frac{V}{V_2}$$

För O₂ fås mha $P_1 = P n_1 / (n_1 + n_2)$:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{(n_1 + n_2) RT / P}{n_1 RT / P} = \frac{n_1 + n_2}{n_1} = \frac{P}{P_1}$$

För N₂ blir

$$\frac{V}{V_2} = \frac{P}{P_2}$$

De tre senaste ekvationerna ger den totala entropiändringen uttryckt i partialtrycken:

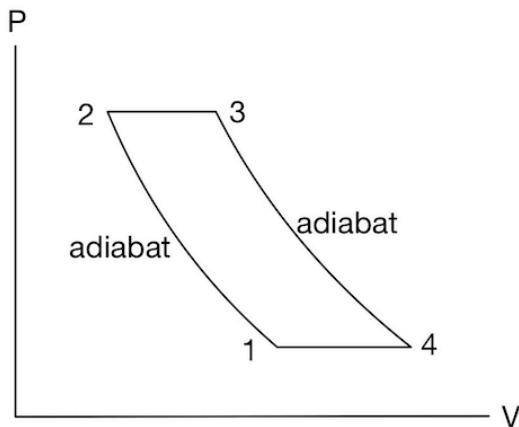
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 R \ln \frac{P}{P_1} + n_2 R \ln \frac{P}{P_2} = 8.314 \cdot \left(1 \cdot \ln 3 + 2 \cdot \ln \frac{3}{2} \right) = 18.88 \text{ kJ/K}$$

Svar: $\Delta S = 19 \text{ kJ/K}$

Alternativ lösning: $S = k \ln(cV^N)$ ger

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 R (\ln V - \ln V_1) + n_2 R (\ln V - \ln V_2) = n_1 R \ln \frac{V}{V_1} + n_2 R \ln \frac{V}{V_2} \\ &= n_1 R \ln \frac{P}{P_1} + n_2 R \ln \frac{P}{P_2} = n_1 R \ln 3 + n_2 R \ln \frac{3}{2} = 19 \text{ kJ/K} \end{aligned}$$

7. Bestäm verkningsgraden för en Brayton-cykel, se figuren. Antag att arbetsgasen är ideal. Svaret ska uttryckas i bland annat tryckkvoten $r = P_2/P_1$ och förenklas maximalt.



Tillförd värme:

$$\Delta Q_1 = C_p(T_3 - T_2)$$

Bortförd värme:

$$\Delta Q_2 = C_p(T_4 - T_1)$$

Verkningsgraden blir

$$\eta = 1 - \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

Relatera temperaturerna till tryckkvoten

$$r = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_4}$$

För adiabaterna fås med $TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konstant}$

$$T_1 = T_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 r^{-(\gamma-1)/\gamma}$$

och

$$T_4 = T_3 r^{-(\gamma-1)/\gamma}$$

Detta ger

$$\eta = 1 - \frac{T_3 r^{-(\gamma-1)/\gamma} - T_2 r^{-(\gamma-1)/\gamma}}{T_3 - T_2} = 1 - r^{-(\gamma-1)/\gamma}$$

Svar: $\eta = 1 - r^{-(\gamma-1)/\gamma}$

8. Clausius-Clapeyrons relation beskriver lutningen hos en fasövergångskurva som separerar två faser i ett PT-diagram:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta V}$$

där L är latent värmet och ΔV är volymsändringen hos systemet vid fasövergången..
Konstruera uttrycket med hjälp av Gibbs fria energi.

Första lagen

$$dU = TdS - PdV$$

och Gibbs fria energi

$$G = U - TS + PV$$

ger

$$dG = dU - TdS - SdT + PdV + VdP = -SdT + VdP$$

På en övergång från fas 1 till fas 2 är G konstant så att $G_1 = G_2$. Därför blir $dG_1 = dG_2$ på fasövergångskurvan vilket ger

$$-S_1dT + V_1dP = -S_2dT + V_2dP$$

Detta ger

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1} = \frac{T\Delta S}{T\Delta V} = \frac{L}{T\Delta V}$$