

Lösningar till Tentamen i Modern Fysik (SH1012/SH1013)
14.00-19.00, 2015-06-01, KTH, Stockholm

1. Metallen polonium har en enkel kubisk kristallstruktur med avståndet 335.2 pm mellan atomplanen. Röntgenfotoner med energin 2570.6 eV används i ett diffraktionsexperiment med en poloniumkristall där kristallplanen är orienterade i ytan och där fotonerna träffar ytan i infallsvinkeln, θ , som uppmäts mot ytans normal. Efter reflektion i ytan så mäts fotonernas intensitet upp med ett Geiger-Müller-rör. För vilken/vilka värden på vinkeln θ får vi intensitetsmaxim(um/a)? [2 p] Man vill nu upprepa experimentet (samma geometri etc) men använda neutroner istället för röntgenfotoner. Vilken kinetisk energi måste neutronerna ha för att ge samma resultat (dvs maximum vid samma vinkel)? [3 p]

Lösning:

Geometrin och Braggs lag ger i detta fall sambandet:

$$2d \sin(90^\circ - \theta) = n\lambda,$$

där $d = 335 \cdot 10^{-12} \text{ [m]}$ är avståndet mellan atomplanen. Vi kan räkna ut våglängden från fotonenergin, E , enligt nedan:

$$\begin{aligned} E &= h\nu = \frac{hc}{\lambda} \\ \lambda &= \frac{hc}{E} = \frac{4.13570 \cdot 10^{-15} \text{ [eV} \cdot \text{s]} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}}{2570.6 \text{ [eV]}} = 4.82 \cdot 10^{-10} \text{ [m]} \end{aligned}$$

Vi får nu:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos(\theta) = \frac{n\lambda}{2d} = n \cdot 0.719,$$

och inser att villkoret kan uppfyllas bara för $n = 1$, eftersom cosinus-funktionen aldrig kan bli större än 1. Till slut får vi fram vinkeln, θ :

$$\theta = \arccos(0.719) = 44^\circ.$$

I andra delen av talet behöver vi ta reda på vilken neutronenergi som motsvarar de Broglie-våglängden som överensstämmer med värdet på λ ovan. Vi har således:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \\ E &= \frac{h^2}{2m \cdot \lambda^2} = \frac{4.13570^2 \cdot 10^{-30} \text{ [eV}^2 \cdot \text{s}^2]}{2 \cdot 939.280 \text{ [MeV}/c^2] \cdot 4.82^2 \cdot 10^{-20} \text{ [m}^2]} = \\ &= \frac{17.1 \cdot 10^{-30} \text{ [eV}^2 \cdot \text{s}^2] \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ [m}^2/\text{s}^2]}{4.36 \cdot 10^{-10} \text{ [eV} \cdot \text{m}^2]} = 0.00353 \text{ [eV]}. \end{aligned}$$

Vi ser att neutronens rörelseenergi är 3.53 meV, en mycket låg energi. Eftersom hastigheten således är låg var det en god approximation att inte ta hänsyn till relativistiska effekter.

2. Under ett experiment skickar en väteatom ut en foton vid övergången från 3p-tillståndet till 2s-tillståndet. Beräkna fotonens våglängd i nanometer [2 p]. Experimentet upprepas, men nu har man lagt på ett kraftigt magnetfält på 12 Tesla. Beräkna eventuella våglängdsskift (i nm) pga magnetfältet och förklara vilken/vilka de möjliga fotonenergierna blir i detta fall [3 p].

(I detta fall instruerades studenterna under examen att man i lösningen ska anta att elektronen inte har något intrinsiskt spinn. Pga detta förenklas lösningen avsevärt. Detta är förstås ofysikaliskt, men utan detta antagande så saknas viss information i formelsamlingen för att man ska kunna lösa talet.)

Lösning:

Utan magnetfält så beror energinivåerna (till 1:a ordningen) bara av huvudkvanttalet, n . Vi har $n = 2$ för 2s-tillståndet och $n = 3$ för 3p-tillståndet. Vi får således en energiskillnad på

$$\Delta E = 13.6 \text{ [eV]} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1.889 \text{ [eV]}.$$

Detta motsvarar en våglängd på:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} \text{ [eV} \cdot \text{s]} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}}{1.889 \text{ [eV]}} = 656.4 \cdot 10^{-9} \text{ [m]} = 656.4 \text{ [nm]}$$

Med pålagt magnetfält så påverkas nivåer med olika m_l -kvanttal olika. För 2s-tillståndet så har vi $l = 0$ och därför $m_l = 0$. För 3p-tillståndet har vi $l = 1$ och därför tre möjliga värden på m_l , nämligen -1 , 0 , och 1 . Från formelsamlingen har vi ett uttryck för den potentiella energin, U :

$$U = -\mu_B B = \frac{eB}{2m_e} L_z = \frac{eB\hbar}{2m_e} m_l = \mu_B B m_l,$$

där $\mu_B = e\hbar/2m_e = 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ [J/T]}$ ibland kallas *Bohrmagnetonen*.

Beroende på värdet på m_l så får vi alltså tre möjliga energinivåer för 3p-tillståndet, med energiintervallet/uppsplittringen $\mu_B B m_l$. Eftersom 2s-nivån är oförändrad så kan man tänka sig tre olika energi-övergångar; där en (från $m_l = 0$) är oförändrad, och där de andra två har ett skift åt varsitt håll, motsvarande mot energin $\mu_B B m_l$.

För att se vilket våglängdsskift detta energiskift ger så kan vi differentiera formeln för $E(\lambda)$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{hc}{\lambda} \\ dE &= -\frac{hc}{\lambda^2} d\lambda \end{aligned}$$

Det lilla energiskiftet $\mu_B B m_l$ ger nu våglängdsskiftet, $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \mu_B B}{hc} m_l$$

Med $m_l = 1$, λ enligt ovan, $B = 12 \text{ [T]}$ och insatta naturkonstanter så får vi $\Delta\lambda = 0.24 \cdot 10^{-9} \text{ [m]} = 0.24 \text{ [nm]}$ och motsvarande åt andra hållet för $m_l = -1$. Vi har med flit inte diskuterat urvalsregler för detta (ofysikaliska) fall där vi inte har något spinn för elektronen.

3. Isotopen ^{113}Cs har en halveringstid på $17\ \mu\text{s}$ och sönderfaller med s.k. *protone-mission*. Det betyder att en proton lämnar atomkärnan och tunnlar igenom potentialbarriären ungefär som vid ett alfasönderfall. Vilken blir dotterkärnan? [1 p]. Använd tabellerade massor och beräkna vilken kinetisk energi protonen får efter att den lämnat kärnan. Ta hänsyn till att en del av den kinetiska energin ges till den rekylrande dotterkärnan [4 p].

Lösning:

Från det periodiska systemet så kan vi se att protontalet, Z , för Cs är 55. Masstalet, A , för ^{113}Cs är 113. Vid sönderfallet med protonemission så minskar Z med ett, och likaså A . Grundämnet med $Z = 54$ är xenon och dotterkärnan blir således ^{112}Xe .

Den totala bindningsenergin, B , före respektive efter sönderfallet kan skrivas:

$$\begin{aligned} B_{\text{före}} &= [55 \cdot M(^1\text{H}) + (113 - 55) \cdot m_n - M(^{113}\text{Cs})] c^2 \\ B_{\text{efter}} &= [54 \cdot M(^1\text{H}) + (112 - 54) \cdot m_n - M(^{112}\text{Xe})] c^2, \end{aligned}$$

där $M(^A\text{X})$ betecknar den *atomära* massan för en isotop och m_n är neutronmassan. Den i sönderfallet frigjorda energin, Q , är nu lika med förändringen i bindningsenergi:

$$\begin{aligned} Q &= B_{\text{efter}} - B_{\text{före}} = [M(^{113}\text{Cs}) - M(^1\text{H}) - M(^{112}\text{Xe})] c^2 = \\ &= [\textit{formelblad}] = (112.944493 - 1.007825 - 111.935623)931.502\ [\text{MeV}] = \\ &= 0.9732\ [\text{MeV}]. \end{aligned}$$

På grund av rekylenergin som dotterkärnan (Xe-112) får så blir protonens kinetiska energi, E_p , något lägre än Q . Med energins och rörelsemängdens bevarande så är det lätt att härleda följande uttryck, som ger E_p :

$$E_p = \frac{Q}{1 + \frac{1}{112}} = 965\ [\text{keV}].$$

Här har vi förenklat något genom att sätta förhållandet mellan protonens massa och massan hos Xe-112 till $1/112$ istället för att använda de mer exakt tabellerade massorna, men felet från denna approximation är litet.

4. För tillståndet med $n = 2, l = 1$, i väte, beräkna sannolikheten för att elektronen befinner sig innanför Bohrradien [5 p].

Lösning:

Från formelbladet har vi den radiella vågfunktionen för $n = 2, l = 1$:

$$R_{2,1}(r) = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{\sqrt{3} \cdot a_0} e^{-r/2a_0}$$

Vi har för sannolikhetsfördelningen i radiell led, $P(r)$:

$$P(r)dr = r^2 |R_{2,1}(r)|^2 dr = r^2 \frac{1}{8a_0^3} \frac{r^2}{3a_0^2} e^{-r/a_0} dr = \frac{r^4}{24a_0^5} e^{-r/a_0} dr.$$

Om vi integrerar detta uttryck från origo till a_0 så får vi sannolikheten vi söker:

$$\begin{aligned} \int_0^{a_0} P(r)dr &= \frac{1}{24a_0^5} \int_0^{a_0} r^4 e^{-r/a_0} dr = [Beta] = \\ &= \frac{1}{24a_0^5} \left[\frac{e^{-r/a_0}}{(-\frac{1}{a_0})^5} [(-r/a_0)^4 - 4(-r/a_0)^3 + 12(-r/a_0)^2 - 24(-r/a_0) + 24] \right]_0^{a_0} = \\ &= \frac{-1}{24} (e^{-1} [(-1)^4 - 4(-1)^3 + 12(-1)^2 - 24(-1) + 24] - e^0 [0 - 0 + 0 - 0 + 24]) = \\ &= \frac{-1}{24} \left(\frac{65}{e^1} - 24 \right) = 0.00366. \end{aligned}$$

Sannolikheten att hitta partikeln innanför Bohrradien är endast 0.366%.

5. Margareta är teoretisk fysiker. Hon har glömt bort hur stor en atomkärna är och tycker det är pinsamt att fråga sin kollega Dagmar som är experimentalfysiker, trots att de känner varandra väl. Men hon minns att protonens vilomassa är ca $1 \text{ GeV}/c^2$ och att avstånden mellan exciterade tillstånd i typiska atomkärnor är av storleksordningen 1 MeV , så hon använder det för att uppskatta storleken. Gör, liksom Margareta, en enkel kvantmekanisk modell med en enkel potential i en dimension och använd den erhållna lösningen till Schrödingerekvationen för att bestämma/uppskatta storleken på atomkärnan [4 p]. Baserat på vad du vet från kursen: vad är den verkliga (ungefärliga) storleken på en atomkärna med masstalet A ? Gjorde Margareta en bra uppskattning? [1 p].

Lösning:

Vi kan anta att atomkärnan beskrivs av en endimensionell kvantbrunn med oändliga potentialer på sidorna. Brunnens bredd, a , motsvarar då atomkärnans storlek. Lösningarna för möjliga energitillstånd för en partikel (tex en proton) i denna potential finns i formelsamlingen:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}.$$

Den enklaste excitationen måste vara från $n = 1$ till $n = 2$, och energiskillanden däremellan blir då

$$\Delta E = \frac{(2^2 - 1^2)h^2}{8ma^2} = \frac{3h^2}{8ma^2}.$$

Om ΔE nu, enligt Margaretas antagande, är lika med 1 MeV , så får vi (vi använder protonens massa som m) om vi löser ut storleken, a :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{3h^2}{8m\Delta E}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (4.1357)^2 \cdot 10^{-30} [\text{eV}^2 \cdot \text{s}^2] \cdot 9 \cdot 10^{16} [\text{m}^2/\text{s}^2]}{8 \cdot 938.28 \cdot 10^6 [\text{eV}] \cdot 1 \cdot 10^6 [\text{eV}]}} = \\ &= 2.48 \cdot 10^{-14} [\text{m}]. \end{aligned}$$

Från experiment vet vi att en atomkärna har en ungefärlig radie på $1.2 \cdot 10^{-15} A^{1/3} [\text{m}]$. En stor kärna som uran-238 har alltså diametern: $a = 2 \cdot 1.2 \cdot 10^{-15} 238^{1/3} = 1.49 \cdot 10^{-14} [\text{m}]$. Modellen verkar alltså ge rätt storleksordning trots sin enkelhet.

6. Galaxen UGC 2936 studeras av en astronom som använder sig av optisk spektroskopi i det synliga våglängdsområdet. Galaxen befinner sig på avståndet 43.6 Mpc (1 pc=3.26 ljusår) från Jorden. Den är en spiralgalax (vi kan tänka oss den som skiv-formad) och den är orienterad i ett plan som vi betraktar rakt från sidan, så att den ser ut som ett streck i teleskopet.

Våglängden från vätsens röda Balmer- α -linje ligger som vi noterat i modern fysikkursen vid våglängden 656.3 nm. Astronomen mäter våglängden på denna väte-linje från två olika punkter på galaxen, på varsin sida om dess centrum, vid radien 12 kpc. Dessa två mätningar ger värdena 663.9 nm respektive 665.1 nm.

Beräkna galaxens (centrums) hastighet relativt Jorden [2 p], samt beräkna hur lång tid det tar för galaxen att rotera ett varv runt sin egen axel [3 p].

Lösning:

Vi börjar med att anta att Galaxen rör sig rakt ifrån Jorden (ndra antagnaden kan göras, men resultatet kommer att domineras av samma riktningskomponent). Således har vi för ljusets frekvens:

$$f = \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c})} = \frac{f_0 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 + \frac{v}{c}}$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{\frac{c}{\lambda_0} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Vi noterar att det relativa Dopplerskiftet är litet (ca 1%), så vi kan anta att $v \ll c$. Därför använder vi oss inte av relativistiska hastighetstransformationer. Vi kan därmed använda medelvärdet på våglängderna från Galaxens yttre punkter för att få ett värde på ljuset från dess centrum: $\lambda_c = (663.9 + 665.1)/2 = 664.5$ nm. Om hastigheten för galaxens centrum relativt Jorden är v , så kan vi nu skriva:

$$\frac{656.3}{664.5} = \frac{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 + \frac{v}{c}}$$

$$\longrightarrow (2:a\text{-gradsekv.}) \longrightarrow \frac{v}{c} = 0.01242$$

$$\longrightarrow v \approx 3.7 \cdot 10^6 \text{ [m/s]}.$$

På motsvarande sätt kan vi beräkna hastigheterna relativt Jorden för ytterpunkterna:

$$\frac{v_1}{c} = 0.011513$$

$$\frac{v_2}{c} = 0.013319$$

Eftersom v/c är liten så gör vi approximationen att halva skillnaden mellan dessa två hastigheter är lika med galaxens ytterradies hastighet relativt dess centrum, v_G :

$$v_G = \frac{v_2 - v_1}{2} = 2.71 \cdot 10^5 \text{ [m/s]}.$$

Omkretsen, S , på galaxen är $2\pi r = \dots = 2.325 \cdot 10^{21}$ [m]. Omloppstiden, T , blir således: $T = S/v_G = 8.59 \cdot 10^{15}$ [s] eller ca 272 miljoner år.

7. En oerfaren experimentalfysiker, Oskar, försöker i studentlabbet upprepa Millikans försök för den fotoelektriska effekten. Oskar har fyra lasrar, märkta enligt följande:

- HeNe, 632.8 nm, 5.2 mW
- HeCd, 441.5 nm, 1.8 mW
- Ar, 454.6 nm, 0.8 mW
- HeHg, 567 nm, 12.4 mW

Alla lasrarna lyser med en smal parallell stråle (ca 3 mm i diameter). En laser i taget får lysa på den metallplatta (i vakuum) som Oskar har placerat i sin experimentuppställning. Samtidigt mäter han upp den (maximala) kinetiska energin på eventuella elektroner som kommer ut från metallytan. Tyvärr har Oskar glömt vilken metall han använt i metallplattan, men han vet att hans handledare Dagmar gav honom 4 plattor (Zn,Cu,Li,Na), så det måste vara en av dem, och han kollar upp deras utträdesarbete på Internet:

- Zn, $W=3.6$ eV
- Cu, $W=4.6$ eV
- Li, $W=2.9$ eV
- Na, $W=2.4$ eV

Positiva elektronenergier uppmäts för två av lasrarna. Vilka två (maximala) energier är detta och vilken är metallen i metallplattan? [5 p]

Lösning:

Vi vet att de från metallplattan emitterade elektronerna har energin:

$$E_e = h\nu - W = \frac{hc}{\lambda} - W,$$

där W är utträdesarbetet. Om vi räknar ut den första termen för de fyra olika våglängderna så får vi (i samma ordning som de är listade ovan): 1.9593 eV, 2.8082 eV, 2.7273 eV, och 2.1867 eV. Därmed ser vi att endast **natriumplattan** ($W = 2.4$ eV) kan ge ett positivt värde på E_e . De två positiva elektronenergierna erhålles för HeCd-lasern och för Ar-lasern och blir $E_{\text{HeCd}} = 2.8082 - 2.4 = 0.41$ eV respektive $E_{\text{Ar}} = 2.7273 - 2.4 = 0.33$ eV.

8. Med en partikelaccelerator kan man framställa antiprotoner, $\bar{p}$. Antiprotonen har samma massa som protonen men negativ laddning istället för positiv. En möjlig reaktion för att producera antiprotoner ser ut på följande sätt:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

Här träffar en stråle högenergetiska protoner ett strålmål vars protoner befinner sig i vila före reaktionen. Efter reaktionen har vi tre protoner och en antiproton. Beräkna den minsta kinetisk energi för den inkommande protonen (i lab-systemet) som krävs för att reaktionen ska vara möjlig. [5 p]

Lösning:

Vi måste bevara både energi och rörelsemängd. Vid tröskelenergin så kommer de fyra partiklarna som skapats omedelbart efter reaktionen att tillsammans röra sig i samma riktning som den inkommande protonen, men med annan hastighet. Vi kan alltså skriva:

$$E + m_p c^2 = 4E',$$

där E är den inkommande protonens *totala* energi och E' är den totala energi som en av partiklarna har efter reaktionen, och m_p är protonmassan. För rörelsemängderna, p (den inkommande protonen före reaktionen) resp p' (en av partiklarna efter reaktionen) så får vi analogt:

$$p = 4p'.$$

Från formelsamlingen har vi ett samband som vi kan använda för att skriva om rörelsemängden:

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\ p &= \frac{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{c} \end{aligned}$$

Ekvationen som konserverar rörelsemängden ovan kan nu skrivas om (med protonmassan) som:

$$\sqrt{E^2 - m_p^2 c^4} = 4\sqrt{E'^2 - m_p^2 c^4}$$

Denna och den första ekvationen ovan har nu tillsammans två okända: E och E' . Om vi löser ut E så får vi:

$$E = 7m_p c^2.$$

Den kinetiska energin på den inkommande protonen, E_k , kan nu enkelt räknas ut:

$$E_k = E - m_p c^2 = 6m_p c^2 = 6 \cdot 938.280 = 5629.7 \text{ [MeV]}.$$