

Lösningsförslag till Tentamen i Modern Fysik SH1014

14.00-19.00, 2024-01-08, KTH, Stockholm

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng. Betygskriterierna är följande:
A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

1. Problem:

Renen Rudolf har enligt legenden en röd lysande mule och detta beror givetvis på den stora utmaning som jultomten står inför att hinna leverera paket till en betydande del av världens befolkning på ett dygn. En aktivt springande ren har en kroppstemperatur på ca 40°C . Detta ger upphov till ett emissionspektrum av svartkroppsstrålning.

a) Vad är våglängden för intensitetsmaximum från Rudolfs mule, när han är i vila efter en spurt? [2 p]

Under julen färdas Rudolf i så hög hastighet att detta maximum skiftas till klarrött (ca 680 nm våglängd) för de som ser honom komma rakt emot sig.

b) Hur fort springer Rudolf under julen när han hjälper jultomten till alla hem? [3 p]

Lösning:

a) Våglängden för intensitetsmaximum från en kropp med en given temperature ges av Wien's förskjutningslag, som är derivatan av Plankfunktionen med avseende på våglängden. Den lyder som $\gamma_{max} = \frac{b}{T}$, där b är en konstant med värde $2.898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$.

I denna uppgift har Rudolfs mule temperaturen $T = 40^\circ\text{C} = 313 \text{ K}$. Detta ger alltså att våglängden med maximal intensitet är 9259 nm.

b) När Rudolf drar jultomten runt till alla hem så springer han i relativistiska hastigheter, och för en observatör som ser honom komma rakt emot sig så får vi ett Dopplerskift som förkortar våglängden på den emitterade strålningen. Strålningen blåskiftas alltså från infrarött in i det röda, och vi söker den fart v som ger oss ett skifte från 9259 nm till 680 nm av intensitetsmaximum. Vi ställer upp formeln för ett relativistiskt Dopplerskifte:

$$f = \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c} \cos\theta)}$$

Här vet vi att $\theta = 180^\circ$ och att $\cos\theta = -1$. Eftersom vi arbetar med våglängd och inte frekvens använder vi sambandet $\lambda = \frac{c}{f}$ och får då för våglängdskiftet

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1}{\gamma(1 - \frac{v}{c})} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta)} \text{ där } \beta = v/c, \lambda \text{ är den observerade våglängden, och } \lambda_0 \text{ våglängden}$$

i ljuskällans inertialsystem. Vi kan nu lösa för β som $\beta = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}$ vilket med instoppade

värden, $\lambda = 680 \text{ nm}$ och $\lambda_0 = 9259 \text{ nm}$ ger oss $\beta = 0.9893$, d.v.s. att Rudolfs fart är 98.93% av ljushastigheten.

2. Problem:

En partikel med massan m befinner sig i en endimensionell potential, $U(x)$. Partikelns vågfunktion kan skrivas:

$$\psi(x) = \begin{cases} Axe^{-ax} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A . [2 p]

b) Bestäm $U(x)$ och beräkna partikels energi, E . [3 p]

Lösning:

a) Normering av vågfunktionen ger oss konstanten A genom:

$$1 = A^2 \int_0^\infty x^2 e^{-2ax} dx = \frac{A^2 2!}{(2a)^3}. \text{ Vi får alltså att } A = \pm 2a^{3/2}.$$

b) Vi vill sätta in vågfunktionen i Schrödingerekvationen och deriverar den därför först två gånger.

$$\psi(x) = Axe^{-ax}$$

$$\psi'(x) = Ae^{-ax} - Aaxe^{-ax}$$

$$\psi''(x) = Axa^2e^{-ax} - 2Aae^{-ax} = Axe^{-ax} \left(a^2 - \frac{2a}{x}\right) = \psi(x) \left(a^2 - \frac{2a}{x}\right)$$

Vi ser alltså att vågfunktionen själv är en del av dess derivator och detta gör det enklare att läsa ut termer när vi stoppar in andraderivatan i Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

som då blir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(a^2 - \frac{2a}{x}\right) \psi(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Om vi nu bryter ut $\psi(x)$ ur ekvationen får vi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(a^2 - \frac{2a}{x}\right) + U(x) = E$$

Där vi kan identifiera konstanta termer med energin, E , och termer beroende på x med potentialen $U(x)$:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 a}{mx}$$

och

$$E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}.$$

3. Problem:

En väteatom befinner sig i sitt grundtillstånd.

- a) Vad är kvanttalen (n, l, m_l) för detta tillstånd? [1 p]
- b) Bestäm den mest sannolika radien, r_0 , för väteatomen, uttryckt i a_0 . [2 p]
- c) Beräkna väntevärdet för radien, $\bar{r}$, uttryckt i a_0 . [2 p]

Lösning:

a) Kvanttalerna (n, l, m_l) för en väteatom i sitt grundtillstånd är unikt bestämda som $(n, l, m_l) = (1, 0, 0)$.

b) Den mest sannolika radien, r_0 , bestäms genom att ställa upp sannolikhetsfunktionen $P(r)$ som bara beror på den radiella delen av vågfunktionen:

$$P(r) = r^2 |R_{1,0}|^2 = r^2 \frac{1}{a_0^3} 2^2 e^{-2r/a_0} = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

Vi deriverar nu denna med avseende på r :

$$P'(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \right) = \frac{8r}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \left(1 - \frac{r}{a_0} \right)$$

Vi hittar här den intressanta extrempunkten (maximum) då $r = a_0$.

c) Väntevärdet $\bar{r}$ finner vi genom:

$$\bar{r} = \int_0^\infty r r^2 |R_{1,0}|^2 dr = \int_0^\infty r P(r) dr = \int_0^\infty \frac{4r^3}{a_0^3} e^{-2r/a_0} = \frac{4}{a_0^3} \frac{3!}{(2/a_0)^4} = \frac{3}{2} a_0.$$

4. Problem:

Den diatomära molekylen CX, där X är ett okänt grundämne, har en fjäderkonstant på 1860 N/m och ett jämviktsavstånd på 0.113 nm. Våglängden på de fotoner som absorberas vid en vibrationsövergång ($\Delta V = 1$) är ~~741 nm~~ 4656 nm, där V är vibrationskvanttalet.

a) Beräkna den reducerade massan för CX. [2 p]

b) Vilken molekyl är detta? [1 p]

c) Beräkna energin, dels för det första exciterade vibrationstillståndet, dels för det första exciterade rotationstillståndet, för CX. [2 p]

Lösning:

a) Den reducerade massan kan vi ta fram genom att den ingår i uttrycket för de kvantiserade vibrationsenergierna:

$$E_{vib} = \left(V + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 = \left(V + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{k/\mu}; \quad V = 0, 1, 2, 3, \dots$$

där k är fjäderkonstanten och μ är den reducerade massan. Vi vet att fotoner med våglängden 4655 nm absorberas av molekylerna CX. Dessa har alltså energin $E = \frac{hc}{\lambda} = 0.265$ eV. För en absorption har vi att $\Delta V = 1$ och därför är energin för övergången given av

$$E_\gamma = \hbar \sqrt{k/\mu}$$

Vi kan nu lösa för μ och får:

$$\mu = \frac{k\hbar^2}{E_\gamma^2}$$

vilket med givna värden ovan ger oss $\mu = 6.86$ u.

b) Då vi känner μ och massan för kol (C), $m_C = 12$ u, kan vi lösa ut massan för X:

$$\mu = \frac{m_C m_X}{m_C + m_X}$$

vilket ger:

$$m_X = \frac{m_C \mu}{m_C - \mu} = 16.0 \text{ u}$$

Detta ger oss att X är syre (O) och CX alltså är kolmonoxid, CO.

c) De första exciterade tillstånden för vibration och för rotation ges vid $V = 1$, respektive $J = 1$ i formlerna:

$$E_{vib} = \left(V + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{k/\mu}$$

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

För vibrationsenergin har vi all data ovan och får ut $E_{vib}^{V=1} = 0.397$ eV.

För rotationsenergin behöver vi tröghetsmomentet I , som för en diatomär molekyl ges (med den reducerade massan μ), som $I = \mu r_e^2$

Vi sätter in detta i formeln ovan och får:

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\mu r_e^2} J(J+1)$$

I vilket vi kan sätta in kända värden och dett ger oss, för $J = 1$ att

$$E_{rot}^{J=1} = 0.472 \text{ meV.}$$

5. Problem:

KTH-studenten Hubert har byggt en elektronaccelerator i sitt studentrum. Elektronerna frigörs från ett filament och accelereras över ett spänningsgap med spänningen $U = 52 \text{ V}$ i vakuum. De får därefter träffa olika kristallina material som Hubert vill undersöka.

a) Vilken de Broglie-våglängd har elektronerna när de träffar kristallen? [2 p]

Efter några experiment med elektronvågorna så bestämmer sig Hubert för att bygga om sin elektronaccelerator till ett röntgenrör. Hans plan är att öka spänningen U och låta de accelererade elektronerna träffa en volfram-anod, från vilken röntgenstrålningen emitteras.

b) Vad kallas den process/strålning som ger upphov till ett kontinuerligt energispektrum av högenergetiska fotoner som skickas ut från volfram-anoden? [1 p]

c) Hubert vill att röntgenrörets maximala fotonenergi ska motsvara en fotonvåglängd som överensstämmer med de Broglie-våglängden i uppgift (a) ovan. Vilket värde på U ska Hubert använda för sitt röntgenrör för att detta ska vara möjligt? [2 p]

Lösning:

a) de Broglie-våglängden, λ , för en partikel med en rörelsemängd p uttrycks som $\lambda = h/p$ där h är Plancks konstant. I detta fall så har elektronen så låg kinetisk energi ($= 52 \text{ eV}$) så vi kan räkna med det klassiska uttrycket för rörelsemängden: $p = mv$, vilket med rörelseenergin $E_k = mv^2/2$ ger sambandet: $p = \sqrt{2mE_k}$. för våglängden så får vi då:

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{h}{p} &= \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{4.13570 \cdot 10^{-15} [\text{eV} \cdot \text{s}]}{\sqrt{2 \cdot (0.511 [\text{MeV}]/c^2) \cdot 52 [\text{eV}]}} = \frac{4.13570 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot 0.511 \cdot 10^6 \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2} \cdot 52} [\text{m}] = \\ &= 1.702 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 1.7 \cdot 10^{-10} \text{ m}\end{aligned}$$

b) Processen kallas för *Bromsstrålning*, eller *Bremsstrahlung* på engelska efter det tyska uttrycket. Det är strålning som uppstår när en elektriskt laddad partikel (i detta fall en elektron) bromsar ner, eller byter riktning, vilket elektronerna gör när de kommer nära en (elektriskt laddad) atomkärna. Elektroner som träffar anoden (t.ex. gjord av wolfram) med hög kinetisk energi skickar därför ut bromsstrålning under sin hastiga nedbromsning i materialet. Bromsstrålningen ger ett kontinuerligt spektrum från noll energi upp till den energi som motsvarar elektronens kinetiska energi när den träffar materialet (anoden i detta fall).

c) Den minimala våglängden i ett bromsstrålningsspektrum ges av den maximala kinetiska energin för elektronerna $E_{\max}$ som i detta fall begränsas av accelerationsspänningen: $E_{\max} = eU$. För en minimal våglängd $\lambda = 1.702 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ så får vi:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= c/\nu_{\max} = \frac{hc}{E_{\text{foton,max}}} = \frac{hc}{eU} \\ U &= \frac{hc}{e\lambda_{\min}} = 7291 \text{ V} \approx 7.3 \text{ kV}.\end{aligned}$$

Vi ser att en accelerationsspänning på 7.3 kiloVolt är nödvändig för att få samma fotonvåglängd som den tidigare uppnådda de Broglievåglängden på 1.7 Ångström.

6. Problem:

Bränslestavarna i kärnreaktorer fortsätter att producera värme även lång tid efter att kärnkraftverket stängs av. Det beror på att ett stort antal radioaktiva ämnen, som producerats vid drift, fortsätter att sönderfalla. Detta måste man ta hänsyn till vid förvaring av använt bränsle både på korta och långa tidsskalor.

En typiskt svensk kärnreaktor har en bränslehard på 100 ton som består av urandioxid. En nuklid som produceras i stor mängd under drift är plutonium-239 som har en halveringstid på 24110 år. Antag att mängden Pu-239 är 0.5% av hardens totalvikt då reaktorn stängs av.

a) Använd relevanta massor från formelbladet och beräkna Q_α -värdet för alfa-sönderfallet av Pu-239. Ange svaret i enheten MeV med tre decimaler. [3 p]

b) Vid varje alfa-sönderfall av Pu-239 så bromsar alfa-partikeln och även den rekylrande dotterkärnan snabbt ner i materialet och de genererar därav värmeenergi motsvarande Q_α -värdet. Använd ovanstående information för att räkna ut den totala värmeeffekten som hela mängden Pu-239 ger upphov till kort efter att reaktorn stängs av. Ange svaret i enheten W. [2 p]

Lösning: Dotterkärnan till Pu239 efter alfasönderfall är U235. Det inser man eftersom alfa-partikeln består av två protoner och sammanlagt fyra nukleoner, så vi har $Z \rightarrow Z - 2$ och $A \rightarrow A - 4$. Eftersom Pu har (se periodiskt system) $Z = 94$ så får vi uran ($Z(\text{U}) = 92$). Och från $A = 239 - 4 = 235$ så ser vi att dotterkärnan är U-235. **a)** Q -värdet vid alfasönderfall kan räknas ut från skillnaden i massa före och efter sönderfallet:

$$\begin{aligned} Q_\alpha = \Delta mc^2 &= (M_{\text{Pu}239} - (M_{\text{U}235} + M_{\text{He}4})) c^2 = \\ &= 0.0056310 \text{ [u]} c^2 \cdot 931.502 \frac{\text{MeV}}{c^2} \frac{1}{[\text{u}]} = 5.245 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

b) Vi börjar här med att beräkna antalet Pu-239-atomer i harden. Massan för Pu-239 är 0.5% av 100 ton, dvs 500 kg eller 500000 gram. Antalet Pu-239-atomer blir nu:

$$N = \frac{N_A \cdot \text{Mass}}{\text{molmassa}} = \dots = 1.26 \cdot 10^{27}.$$

Detta antal är förstås lika med antalet Pu239-atomkärnor. Värmeenergin för ett sönderfall är detsamma som Q -värdet. Och effekt är ju *energi/tid*, så vi behöver avgöra hur ofta energin motsvarande Q -värdet genereras. Det ges av *aktiviteten*, A , av vår Pu239-mängd, dvs antalet sönderfall per sekund. Och aktiviteten, A , beror av N enligt: $A = \lambda N$, där λ är sönderfalls-konstanten för Pu239. Vi har nu för effekten P :

$$P = QA = QN\lambda = \frac{QN \ln(2)}{t_{1/2}} = \dots = 964 \text{ W}.$$

Vi har förstås konverterat Q -värdet och halveringstiden till SI-enheter i denna beräkning. Vi ser att den relativt lilla mängden plutonium-239 genererar en ganska stor effekt på strax under 1 kW. Pga den långa halveringstiden så är denna (mycket långsamt exponentiellt avtagande) effekt påtaglig under hela hanteringen av bränslet, vid t.ex. långtidsförvaring i berggrunden.

7. Problem:

En neutral natriumatom har, i sitt grundtillstånd, konfigurationen $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$.

a) Det exciterade tillståndet $1s^2 2s^2 2p^6 3p^1$ ligger avsevärt högre i energi (ca 2 eV högre) än grundtillståndet. Men för en väteatom så har tillstånden $3s^1$ och $3p^1$ samma (degenererade) energi. Varför skiljer sig energierna för de två olika l -tillstånden åt för natrium? Motivera ditt svar noga, gärna med en figur. [2 p].

b) Vilka av följande exciterade tillstånd för natrium är tillåtna? För otillåtna fall, motivera varför de är otillåtna. [3 p]

A: $1s^2 2s^2 2p^7$

B: $1s^2 2s^2 2p^6 4s^1$

C: $1s^2 2s^2 2p^5 2d^2$

D: $1s^2 2s^2 2p^4 3s^3$

E: $1s^1 2s^2 2p^6 3s^2$

F: $2s^2 2p^5 3s^1 3p^1 3d^1 4s^1$

Lösning:

a) Den yttersta elektronen, i tillståndet $3s^1$ respektive $3p^1$, kommer att *skärm*as av de elektroner som befinner sig (huvuddelen av tiden) närmare atomkärnan. Om denna yttre elektron är helt skärmad av de andra 10 elektronerna så uppfattar den en centralladdning av endast $11-10=1$ elementarladdning. Då blir bindningsenergin inte så hög, utan är ungefär som för en väteatom i tillståndet $3s$ eller $3p$. Men om banan för elektronen gör att den delvis befinner sig närmare atomkärnan så blir skärmningseffekten begränsad, och bindningsenergin större. Pga olika banrörelsekvanttal ($l = 0$ respektive $l = 1$) så blir en $3s^1$ -elektron mindre skärmad än en $3p^1$ -elektron. Därför skiljer sig energierna för dessa två tillstånd åt.

b)

A: $1s^2 2s^2 2p^7$: ej tillåtet med fler än 6 elektroner i ett p-skala

B: $1s^2 2s^2 2p^6 4s^1$: ok!

C: $1s^2 2s^2 2p^5 2d^2$: ej tillåtet med 2d ($n=2$ ger $l=0$ eller $l=1$)

D: $1s^2 2s^2 2p^4 3s^3$: ej tillåtet med fler än två elektroner i ett s-skala

E: $1s^1 2s^2 2p^6 3s^2$: ok!

F: $2s^2 2p^5 3s^1 3p^1 3d^1 4s^1$: ok!

8. Problem:

En fysikalisk process som är viktig inom astrofysik är *inverterad Comptonspridning*. Till skillnad från den Comptonspridning som vi talat om i kursen (där elektronen är stillastående före kollisionen) så rör sig elektronen i denna process med en viss hastighet före kollisionen med fotonen. Detta gör att energi kan överföras till fotonen så att den får högre energi än den hade från början. Högenergetiska fotoner som genomgått sådana processer har observerats bland annat från så kallade *radiogalaxer*.

Vi betraktar här ett förenklat fall där kollisionen sker i en dimension, dvs partiklarna rör sig på x -axeln både före och efter kollisionen. En inkommande foton med energin $E_{A,\gamma} = 100$ keV kolliderar med en (från andra hållet inkommande) elektron med den kinetiska energin $E_k = 1$ MeV.

Beräkna fotonens energi, E'_γ efter denna (inversa) Comptonspridning. [5 p]

Lösning:

Problemet kan lösas på flera sätt. Det går t.ex. att direkt använda bevarandelagarna för total energi och rörelsemängd i systemet som problemet är formulerat i, och sedan lösa ut energin för den spridda γ -fotonen. Det är då viktigt att hålla reda på åt vilket håll som elektronen rör sig efter kollisionen, och det är inte helt uppenbart innan man börjat lösa problemet.

Här visas istället en lösningsmetod där vi betraktar Comptonspridningen från elektronens (före kollisionen) inertialsystem. Eftersom elektronen är i vila i det systemet så kan vi använda den vanliga Comptonformeln för att räkna ut energin på den spridda fotonen. Men den inkommande fotonen Dopplerskiftas så att den har en annan energi i elektronens inertialsystem. Och den från elektronen inertialsystems spridda fotonen Dopplerskiftas igen då vi betraktar den från det ursprungliga systemet.

Vi kallar systemet i vilket problemet är formulerat för **A**, och elektronens (före kollisionen) system för **B**. Vi föreställer oss en observatör i A som skickar ut fotonen med $E_{A,\gamma}$ i positiva x -riktningen och efter den inversa Comptonspridningen tar emot fotonen med den ännu okända energin $E'_{A,\gamma}$. Eftersom fotonen efter kollisionen rör sig i negativa x -riktningen så behöver observatören i A befinna sig i negativa x -riktningen i förhållande till kollisionspunkten.

Observatören i B befinner sig, före kollisionen på samma plats som elektronen. Denna observatör ser den inkommande fotonen som rör sig i positiva x -riktningen med energin $E_{B,\gamma}$. Efter Comptonspridningen i B-systemet så rör sig fotonen i negativa x -riktningen (den sprids i vinkeln $\theta = \pi$) och har då, i B-systemet energin $E'_{B,\gamma}$.

Första Dopplerskiftet: observatören i A, som vi enligt ovan kan betrakta som fotonens källa, rör sig *mot* observatören i B. Därmed blir $\theta = \pi$ och $\cos\theta = -1$ i Dopplerformeln (vi använder $E_\gamma = hf$ och skriver formeln med gammaenergierna istället för frekvenserna):

$$E_{B,\gamma} = \frac{E_{A,\gamma}}{\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta)} = \frac{E_{A,\gamma}}{\gamma(1 - \frac{v}{c})} = \dots = 0.5740 \text{ [MeV]}. \quad (1)$$

I uträkningen ovan så har vi först konverterat elektronens kinetiska energi ($E_k = 1$ MeV) till en Lorentz-faktor: $\gamma = 2.9569$, och därefter till en hastighet: $v/c = 0.94108$.

Vi betraktar nu Dopplerspridningen i systemet B. Eftersom elektronen är i vila i B så använder vi den vanliga Comptonformeln. Eftersom fotonen byter riktning i 180° så använder vi $\theta = \pi$, $\cos\theta = -1$ i denna formel:

$$\frac{1}{E'_{B,\gamma}} - \frac{1}{E_{B,\gamma}} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} = \frac{2}{m_e c^2} \quad (2)$$

$$E'_{B,\gamma} = \frac{1}{\frac{1}{E_{B,\gamma}} + \frac{2}{m_e c^2}} = \frac{m_e c^2}{\frac{m_e c^2}{E_{B,\gamma}} + 2} = \frac{E_{B,\gamma}}{1 + 2\frac{E_{B,\gamma}}{m_e c^2}} = \dots = 0.177 \text{ [MeV]}, \quad (3)$$

där m_e är elektronens vilomassa och c är ljushastigheten i vakuum.

Nu betraktar nu den spridda fotonen från observatören i A. Fotonen källa kan nu betraktas som observatören i B och vi inser att även denna gång så rör sig källan *mot* observatören av

den Dopplerskiftade fotonen, vilket get $\theta = \pi$, $\cos\theta = -1$. Vi får då, för gammaenergin för den spridda fotonen i A-systemet:

$$E'_{A,\gamma} = \frac{E'_{B,\gamma}}{\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta)} = \frac{E'_{B,\gamma}}{\gamma(1 - \frac{v}{c})} = \dots = 1.015 \text{ [MeV]}. \quad (4)$$

Vi kan nu kombinera ekvationerna 1, 3, 4 för att få sambandet mellan $E'_{A,\gamma}$ och $E_{A,\gamma}$ i A-systemet:

$$E'_{A,\gamma} = \dots = \frac{E_{A,\gamma}}{\gamma^2(1 - \frac{v}{c})^2 \left(1 + 2\frac{E_{A,\gamma}}{m_e c^2} \frac{1}{\gamma(1 - \frac{v}{c})}\right)} = \dots = 1.015 \text{ [MeV]}. \quad (5)$$

Vi noterar här att för låga hastigheter för elektronen så får vi $\gamma \rightarrow 1$, $v/c \rightarrow 0$ och uttrycket går mot eq.3, dvs resultatet från den vanliga Comptonformeln med $\theta = \pi$.

I ovanstående deluträkningar så har vi använt sambandet mellan v/c och $E_k = 1 \text{ MeV}$ för elektronen:

$$E_k = m_e c^2 (\gamma - 1) \quad (6)$$

$$\frac{E_k}{m_e c^2} + 1 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (7)$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_k}{m_e c^2} + 1\right)^2}}. \quad (8)$$

Med insatta värden $E_k = 1 \text{ MeV}$, $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ och $E_{A,\gamma} = 0.1 \text{ MeV}$ så får vi först $v/c = 0.94108$ från eq. 8, och från eq. 7: $\gamma = 2.9569$. Till slut så får vi sedan $E'_{A,\gamma} = 1.015 \text{ MeV}$ från eq. 5, vilket var den spridda fotonenergin som vi efterfrågade.

Svar: Den spridda fotonens energi blir 1.015 MeV.

Den kinetiska energin för elektronen efter kollisionen, E'_k , fås enkelt från den totala energins bevarande i systemet A:

$$E = m_e c^2 + E_k + E_{\gamma,A} = m_e c^2 + E'_k + E'_{\gamma,A} \quad (9)$$

$$E'_k = E_{\gamma,A} - E'_{\gamma,A} + E_k = 0.085 \text{ MeV}. \quad (10)$$

Om vi sätter upp en ekvation för den relativistiska rörelsemängden så kan vi konstatera att elektronen (i systemet A) efter den inversa Comptonspridningen rör sig åt samma håll som den gjorde från början, dvs i samma riktning som fotonen efter kollisionen.

Uttrycket i eq.5 hade förstås kunnat skrivas om direkt i termer av E_k istället för v/c och γ . Ett motsvarande uttryck kan också tas fram genom att bara betrakta bevarande av total energi och rörelsemängd, eliminera rörelsemängderna i ekvationerna och få fram relationen mellan $E_{\gamma,A}$ och $E'_{\gamma,A}$.