



Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2024-03-14

Skrivtid: 08:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	27	24	21	18	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. (a) Visa att fältet $F(x, y) = (\sin x + x \cos x + ye^y, x(y+1)e^y)$ är ett potentialfält.

- (b) Beräkna

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

där γ är den räta linjen från punkten $(\pi/2, 0)$ till punkten $(\pi, 1)$.

Lösning:

- (a) Vi söker $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \sin x + x \cos x + ye^y \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x(y+1)e^y \end{cases}$$

Från andra ekvationen får vi

$$U(x, y) = xye^y + g(x),$$

där g är en godtycklig deriverbar funktion. Derivation med avseende på x ger oss

$$\frac{\partial U}{\partial x} = ye^y + g'(x).$$

Detta ger att $g(x) = x \sin x$. Alltså ges potentialen av

$$U(x, y) = xye^y + x \sin x$$

vilket visar att F är ett potentialfält.

(b) Eftersom F är ett potentialfält ges kurvintegralen av

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = U(\pi, 1) - U\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \pi e - \frac{\pi}{2}.$$

2. Beräkna integralen

$$\iiint_{\Omega} e^{-x^2-y^2-z} dx dy dz,$$

där $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$.

Lösning: Eftersom integranden är positiv kan vi nyttja itererad integration. Vi kan för givet $0 \leq z$ integrera cirkelskivan $x^2 + y^2 < z$. Med andra ord

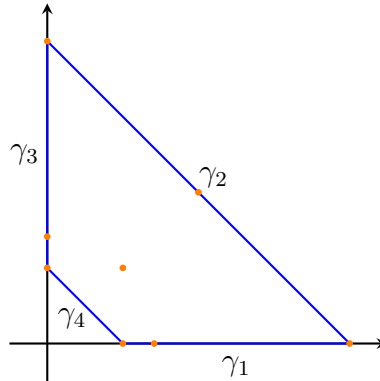
$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} e^{-x^2-y^2-z} dx dy dz &= \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\iint_{x^2+y^2 < z} e^{-x^2-y^2} \right) dz \\ &= \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-r^2} r dr d\theta \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-z} \left[\frac{e^{-r^2}}{-2} \right]_0^{\sqrt{z}} dz \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-z} (1 - e^{-z}) dz \\ &= \pi \int_0^{\infty} (e^{-z} - e^{-2z}) dz \\ &= \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-z} + \frac{e^{-2z}}{2} \right]_0^R \\ &= \pi(1 - 1/2) = \pi/2. \end{aligned}$$

3. Bestäm det största och minsta värdet av

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \ln(x + y),$$

då $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $1 \leq x + y \leq 4$.

Lösning: En skiss på området är följande, där de orange punkterna kommer från senare uträkningar:



Vi börjar med att studera stationära punkter i vårt område. Vi får

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x - \frac{4}{x+y} = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y - \frac{4}{x+y} = 0 \end{cases}$$

vilket visar att $x = y$ och att $2x - 2/x = 0$. Detta ger oss $x = y = 1$ eftersom $x = -1$ är utanför vårt område. En kandidat är alltså $f(1, 1) = 2 - 4 \ln 2$.

Låt oss kolla hörnen. Vi får kandidaterna $f(1, 0) = f(0, 1) = 1$ och $f(0, 4) = f(4, 0) = 16 - 4 \ln 4 = 16 - 8 \ln 2$.

Det återstår att kolla funktionens värde på randen.

Vi börjar med γ_1 , där en parametrisering ges av $(x(t), y(t)) = (t, 0)$, där $1 \leq t \leq 4$. Låt $\varphi_1(t) = f(t, 0) = t^2 - 4 \ln t$. Vi får $\varphi'_1(t) = 2t - 4/t = 0$ om och endast om $t = \sqrt{2}$. Vi får kandidaten $f(\sqrt{2}, 0) = 2 - 4 \ln \sqrt{2} = 2 - 2 \ln 2$.

Vi inser att symmetri ger att analysen över γ_3 är analog med γ_1 och vi får $f(0, \sqrt{2}) = 2 - 2 \ln 2$ som kandidat.

Studera nu γ_2 . En parametrisering ges av $(x(t), y(t)) = (t, 4 - t)$, där $0 \leq t \leq 4$. Definiera $\varphi_2(t) = f(t, 4 - t) = t^2 + (4 - t)^2 - 4 \ln 4$. Vi får $\varphi'_2(t) = 2t - 2(4 - t) = 4t - 8 = 0$ om och endast om $t = 2$. Vi har fått kandidaten $f(2, 2) = 2^2 + 2^2 - 4 \ln 4 = 8 - 8 \ln 2$.

Slutligen följer analysen längs γ_4 . En parametrisering ges av $(x(t), y(t)) = (t, 1 - t)$, där $0 \leq t \leq 1$. Definiera $\varphi_4(t) = f(t, 1 - t) = t^2 + (1 - t)^2$. Vi får $\varphi'_4(t) = 2t - 2(1 - t) = 4t - 2 = 0$ om och endast om $t = 1/2$. Vi har fått kandidaten $f(1/2, 1/2) = 1/2$.

Av kandidaterna är det största värdet $16 - 8 \ln 2$ och det minsta är $2 - 4 \ln 2$.

4. Ytan Y ges av ekvationen $\ln z + x + 2 = xy + 2z$.

(a) Visa att det finns en funktion f så att ytan kan beskrivas som $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 1)$.

(b) Antag att $f \in C^3$ och bestäm Taylorutvecklingen av f av grad 2.

Lösning:

- (a) Bilda $F(x, y, z) = \ln z + x + 2 - xy - 2z$. Ytan Y ges då av nivåytan $F(x, y, z) = 0$. Enligt Implicita funktionssatsen finns detta f då $F'_z(0, 0, 1) \neq 0$. Vi har att

$$F'_z(x, y, z) = \frac{1}{z} - 2$$

och därmed är $F'_z(0, 0, 1) = -1 \neq 0$. Vi har visat existensen av f .

- (b) Vi börjar med att notera att $f(0, 0) = 1$.

Genom att nyttja implicit derivation av uttrycket

$$\ln f(x, y) + x + 2 - xy - 2f(x, y) = 0$$

med avseende på x får vi

$$\frac{f'_x(x, y)}{f(x, y)} + 1 - y - 2f'_x(x, y) = 0$$

och

$$f'_x(0, 0) = 1.$$

Låt oss nu bestämma $f'_y(0, 0)$. Vi har

$$\frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} - x - 2f'_y(x, y) = 0$$

vilket ger

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

Vi bestämmer nu $f''_{xx}(0, 0)$. Vi får

$$\frac{f''_{xx}(x, y)f(x, y) - f'_x(x, y)^2}{f(x, y)^2} - 2f''_{xx}(x, y) = 0$$

och med $f(0, 0) = 1$, $f'_x(0, 0) = 1$ får vi $f''_{xx}(0, 0) = -1$.

På liknande vis får vi

$$\frac{f''_{xy}(x, y)f(x, y) - f'_x(x, y)f'_y(x, y)}{f(x, y)^2} - 1 - 2f''_{xy}(x, y) = 0$$

och

$$f''_{xy}(0, 0) - 1 - 2f''_{xy}(0, 0) = 0$$

vilket ger $f''_{xy}(0, 0) = -1$.

Slutligen

$$\frac{f''_{yy}(x, y)f(x, y) - f'_y(x, y)^2}{f(x, y)^2} - 2f''_{yy}(x, y) = 0$$

vilket blir

$$f''_{yy}(0,0) = 0.$$

Därmed blir Taylorpolynomet av grad 2

$$p_2(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2}(-x^2 - 2xy).$$

5. (a) Antag att $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är av klass C^2 , där

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\}.$$

Låt oss införa de nya variablerna

$$\begin{cases} s = \sqrt{y} \\ t = \sqrt{x-y}. \end{cases}$$

Transformera uttrycket

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

i de nya variablerna.

- (b) Uttryck differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$

i de nya variablerna.

- (c) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen och uttryck svaret i de ursprungliga variablerna x och y .

Lösning:

- (a) Låt $f(s, t) = u(x, y)$, vi får

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Användning av produktregeln ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = -\frac{1}{4\sqrt{x-y}} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{4(x-y)} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ &= -\frac{1}{4t} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{4t^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

(b) Låt oss även transformera det andra uttrycket i ekvationen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x-y}} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4t} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2t} \left(\frac{1}{2s} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} - \frac{1}{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

Ekvationen blir nu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = 4st$$

(c) Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2s^2t + g_1(t),$$

där g_1 är en godtycklig deriverbar funktion. Primitiv funktion i t blir nu

$$f(s, t) = s^2t^2 + g_2(t) + g_3(s),$$

där g_2 och g_3 är deriverbara funktioner. Alltså blir

$$u(x, y) = y(x - y) + g_2(\sqrt{x - y}) + g_3(\sqrt{y}).$$

6. Beräkna

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

där $F(x, y, z) = (x^2y, x^3/3, xy)$ och γ är skärningen mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och ytan $z = y^2 - x^2$ orienterad moturs sedd ovanifrån (från högre z -värden).

Lösning: Låt oss använda Stokes sats. Vi kan parametrisera ytan Y innanför cylindern mha

$$r(x, y) = (x, y, y^2 - x^2)$$

på mängden $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vi får nu

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F \cdot dr &= \iint_Y \text{rot } F \cdot N \, dS = \iint_D \text{rot } F \cdot (r'_x \times r'_y) \, dxdy \\ &= \iint_D (x, -y, 0) \cdot (2x, -2y, 1) \, dxdy = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dxdy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr d\theta = \pi\end{aligned}$$

7. Låt a vara en positiv konstant. Beräkna arean av randen till mängden

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2, x^2 + y^2 \leq 2az\}.$$

Lösning: Skärningen mellan ytorna sker då $z^2 + 2az - 3a^2 = 0$ vilket ger att $z = a$. Totala ytans area består nu av två delar som båda är funktionsytor på samma parametermängd $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$. De ges av $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ och $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$.

Låt oss börja med den övre ytan $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$. En parametrisering av ytan ges av $r(x, y) = (x, y, \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2})$ över D . Arealen ges av

$$\begin{aligned} A_1 &= \iint_D |r'_x \times r'_y| \, dx dy = \iint_D \left| \left(\frac{x}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \right| \, dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{3a^2}{3a^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy = \sqrt{3}a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{r \, dr}{\sqrt{3a^2 - r^2}} \, d\theta \\ &= 2\sqrt{3}\pi a \left[-\sqrt{3a^2 - r^2} \right]_0^{\sqrt{2}a} = 2\pi a^2(3 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Låt oss nu studera arean av den undre ytan som ges av funktionen $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$ för $(x, y) \in D$. En parametrisering här ges av $r(x, y) = (x, y, 1/2a(x^2 + y^2))$ över D . Arealen blir

$$\begin{aligned} A_2 &= \iint_D |r'_x \times r'_y| \, dx dy = \iint_D \left| \left(-\frac{x}{a}, -\frac{y}{a}, 1 \right) \right| \, dx dy \\ &= \frac{1}{a} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} \, dx dy = \sqrt{1}a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}a} \sqrt{a^2 + r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= 2\sqrt{3}\pi a \left[-\sqrt{3a^2 - r^2} \right]_0^{\sqrt{2}a} = \frac{2\pi}{3a} [(a^2 + r^2)^{3/2}]_0^{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{2\pi a^2(3\sqrt{3} - 1)}{3} \end{aligned}$$

Sammanlagt får vi den totala arean

$$A_1 + A_2 = 16\pi a^2/3.$$

8. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar.
 (b) Visa att om $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ så är f differentierbar.

Lösning: Se boken.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!