

TENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 och SI1140 Del 1, VT17

Torsdagen 1 juni 14:00-19:00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut. Räknedosa ej tillåten!

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från kursomgången VT17 adderas till första uppgiften, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på KTH social (Extentor).

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng. Betygsgränssarna finns på KTH social (kurs-PM).

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ρ, θ, z) är cylinderkoordinater definierade genom $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. (r, θ, φ) är sfäriska koordinater definierade genom $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

1. (a) Beräkna den kraft $\mathbf{F}$ som verkar på volymen $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i tryckfältet $p = (p_0/R^3)(x^3 + z^3)$. *Ledning:* $\mathbf{F} = - \iiint_V \nabla p dV$; $R > 0$ och $p_0 > 0$ är konstanter.

- (b) Bestäm konstanterna $a > 0$, $b > 0$ så att skalärfältet

$$\Phi = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{a/2}} e^{-b\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

uppfyller $-\Delta\Phi + \lambda^2\Phi = 0$ där $\lambda > 0$ är en konstant. ($\Delta\Phi = \text{div grad } \Phi$.) (3+3p)

2. (a) $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är godtyckliga vektorfält. Är följande påstående korrekt? Om ja, bevisa det. Om inte, rätta till det.

(i) $\Delta\mathbf{A}$ är lika med $\text{rot rot } \mathbf{A}$

(ii) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ är lika med $\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$

- (b) Beräkna $\nabla \cdot (z\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor. (4+2p)

3. a) En kropp med den glatta begränsningsytan S har volymen V , $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är konstanta vektorer, och $\mathbf{B} = \mathbf{b} \times \mathbf{r}$. Beräkna integralen

$$\oiint_S \mathbf{B}(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}), \quad \text{orienteringen av } S \text{ är utåt.}$$

- b) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\text{grad} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{2q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} + px^2 \right)$$

ut ur området $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$. $\mathbf{a}$ är en konstant vektor med längd $a = |\mathbf{a}|$, och p, q är konstanter. (3+3p)

4. Paraboliska koordinater u, v, φ är ortogonala och definieras av ekvationerna

$$x = uv \cos \varphi, \quad y = uv \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$$

- (a) Beräkna $\operatorname{div} \mathbf{A}$ där $\mathbf{A} = \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_v$. *Ledning:* Anta att $uv > 0$.
 (b) Transformerar $\mathbf{F} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ till paraboliska koordinater. *Ledning:* Räkningen blir enklare om du först bestämmer en potential till $\mathbf{F}$. (3+3p)

5. Hastighetsfältet $\mathbf{u}$ hos en vätska uppfyller Eulerekvationen

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p$$

och $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, där ρ (= massdensiteten) är en konstant och p (= trycket) ett skalärfält (alla fält beror på positionen $\mathbf{r}$ och tiden t).

- (a) Visa att $\rho \mathbf{u}$ (= rörelsemängdsmomentstäthet) uppfyller kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \partial_j T_{ij} = 0$$

där T_{ij} definierar en tensor av ordning 2 (= spänningstensor) som skall bestämmas. (u_i är komponenter av $\mathbf{u}$ i ett kartesiskt koordinatsystem.)

- (b) Visa att $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ (= vorticiteten) uppfyller differentialekvationen

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}.$$

Ledning: Visa att $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(|\mathbf{u}|^2/2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$. (6p)

6. Du skall bestämma den stationära temperaturfördelningen i väggen till ett runt torn och använda detta för att beräkna värmeförlusten genom tornets runda vägg.

- (a) Skriv ner ekvationerna som kan beskrivas på följande sätt, och härled från dem att temperaturfältet T uppfyller Laplaces ekvation $\Delta T = 0$: Värmeströmmen $\mathbf{j}$ är riktad åt det håll temperaturen minskar mest, och dess belopp är proportionellt mot temperaturminskningen i denna riktning. $\mathbf{j}$ är källfritt, dvs. flödet av $\mathbf{j}$ ut ur en godtycklig delvolym av väggen är noll. *Ledning:* OBS att du kan lösa (b) och (c) även om du inte gör (a).

- (b) Anta att tornets vägg motsvarar området $R_1 < \rho < R_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, och $0 < z < h$ med konstanter $R_1 > 0$, $R_2 > R_1$ och $h > 0$, och att temperaturen vid randytan $\rho = R_1$ är lika med innetemperaturen T_1 och vid randytan $\rho = R_2$ är lika med yttemperaturen $T_2 < T_1$. Beräkna temperaturen inom väggen givet antagandet att denna bara beror på ρ : $T = T(\rho)$.

- (c) Beräkna värmemängden per tidsenhet som strömmar genom tornets yttre mantelyta $\rho = R_2$. (6p)

LYCKA TILL!

Formelblad Vektoranalys

Följande formler gäller i ett ortogonalt, kroklinjigt koordinatsystem med koordinaterna u_1, u_2, u_3 , basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och skalfaktorerna h_1, h_2, h_3 :

- $d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$
- $\text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$
- $\text{div grad } \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$

där A_1, A_2 och A_3 är de kroklinjiga komponenterna av vektorfältet $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3.$$

Specialfall

Cylinderkoordinater: $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$

Sfäriska koordinater: $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$

ϵ - δ -relationen (tensornotation)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

Stokes sats (tensornotation)

$$\iint_S \epsilon_{rst} \frac{\partial A_{jk\dots}}{\partial x_t} dS_s = \oint_C A_{jk\dots} dx_r$$

Gauss sats (tensornotation)

$$\iiint_V \frac{\partial A_{jk\dots}}{\partial x_i} dV = \oiint_S A_{jk\dots} dS_i$$

Lösningssöreslag tentamen SI1146 och SI1140 Del 1, 1 juni 2017

1. a)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -(p_0/R^3) \iiint_V (3x^2, 0, 3z^2) dV = (\text{Symmetriargument}) = -(p_0/R^3) \iiint_V (r^2, 0, r^2) dV \\ &= -(p_0/R^3)(1, 0, 1) 4\pi \int_0^R dr r^4 = \boxed{-\frac{4\pi}{5} p_0 R^2 (1, 0, 1)}\end{aligned}$$

b) $\Phi = r^{-a} \exp(-br) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= [\partial_r^2 + (2/r)\partial_r] r^{-a} e^{-br} \\ &= ((-a)(-a-1)r^{-a-2} + 2(-b)(-a)r^{-a-1} + (-b)^2 r^{-a}) e^{-br} + \frac{2}{r}((-a)r^{-a-1} + (-b)r^{-a}) e^{-br} \\ &= e^{-br} (r^{-a-2}[a(a+1) - 2a] + r^{-a-1}[2ab - 2b] + r^{-a}b^2) = \lambda^2 r^{-a} e^{-br} \\ \Rightarrow a(a+1) - 2a &= a(a-1) = 0, 2ab - 2b = 2b(a-1) = 0, b^2 = \lambda^2 \quad \boxed{a = 1, \quad b = \lambda}\end{aligned}$$

2. (a) Nej. Sant är att, för C^2 vektorfält $\mathbf{A}$:

$$\Delta\mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}$$

Bevis:

$$[\text{rot rot } \mathbf{A}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m = \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i$$

lika med $[\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}]_i$. v.s.v.

(b) Nej. Sant är att, för C^2 vektorfält $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:¹

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

Bevis:

$$[\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i = \partial_i \epsilon_{ijk} A_j B_k = \epsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k + \epsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j = -\epsilon_{jik} A_j \partial_i B_k + B_k \epsilon_{kij} \partial_i A_j$$

lika med $[-\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})]_i$. v.s.v.

(c) Med (b) och $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla f$,

$$\nabla \cdot (z\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = -z\mathbf{a} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{r})}_{=0} + \mathbf{r} \cdot \underbrace{(\nabla \times z\mathbf{a})}_{-\mathbf{a} \times \nabla z = -\mathbf{a} \times \mathbf{e}_z} = -\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{e}_z)$$

lika med $\boxed{(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_z}$.

¹Du tappar inga poäng om du inte skrev "C²" — det var inget vi pratade mycket om in denna kurs.

3. (a)

$$\left[\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}) \right]_i = \oint_S B_i a_j dS_j = \iiint_V dV \underbrace{\partial_j (B_i a_j)}_{a_j \partial_j \epsilon_{ikl} b_k x_l = a_j \epsilon_{ikj} b_k} = \iiint_V dV [\mathbf{b} \times \mathbf{a}]_i$$

lika med $[\mathbf{b} \times \mathbf{a}]_i \iiint_V dV \Rightarrow \text{Svar: } \boxed{\mathbf{b} \times \mathbf{a} V}$.

(b) Vi vet att

$$-\oint_S \text{grad} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$$

om $\mathbf{b}$ omslutas av S och 0 annars.

[Bevis: Med sfäriska koordinater så att $r = |\mathbf{r} - \mathbf{b}|$ (dvs. $x = b_x + r \sin(\theta) \cos(\varphi)$) osv.; $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ eller $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$),

$$\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} = \mathbf{e}_r \partial_r \frac{1}{r} = -\mathbf{e}_r \frac{1}{r^2}$$

uppfyller

$$\text{div grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} = \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r (r^2 \sin \theta (-\frac{1}{r^2})) \right) = 0 \quad (r > 0),$$

och enligt Gauss satsen är integralen 0 om $r > 0$ i volymen som omslutas av S , och lika med

$$-\oint_{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|=a} \text{grad} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{\mathbf{e}_r \frac{Q}{a^2} \cdot \mathbf{e}_r}_{Q} a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = 4\pi Q$$

(första ytintegralsymbolen betyder integralen över sfärytan $|\mathbf{r} - \mathbf{b}| = r = a$ med radie $a > 0$ och $\mathbf{S} = \mathbf{e}_r dS$) om $r = 0$ omslutas av S . v.s.v.]

Sfärytan $x^2 + y^2 + z^2 = (2a)^2$ omslutar $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ och $\mathbf{r} = -\mathbf{a} \Rightarrow$ Flödet är lika med

$$\begin{aligned} \oint_S \text{grad} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{2q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} + px^2 \right) \cdot d\mathbf{S} &= \underbrace{\oint_S \text{grad} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \right) \cdot d\mathbf{S}}_{-4\pi q} \\ &\quad - \underbrace{\oint_S \text{grad} \left(\frac{2q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right) \cdot d\mathbf{S}}_{8\pi q} + \underbrace{\oint_S \text{grad} (px^2) \cdot d\mathbf{S}}_{\iiint_V \text{div grad}(px^2) dV = \iiint 2p dV} = \boxed{4\pi q + 2p \frac{4\pi(2a)^3}{3}}. \end{aligned}$$

4. (a)

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_\varphi} \partial_v (h_u h_\varphi u),$$

och

$$h_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| = \sqrt{(v \cos(\varphi))^2 + (v \sin(\varphi))^2 + u^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$h_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{(u \cos(\varphi))^2 + (u \sin(\varphi))^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$h_\varphi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| = (\dots) = uv$$

ger

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{(u^2 + v^2)uv} \underbrace{\partial_v((u^2 + v^2)uv)}_{u^3 + 3uv^2} = \boxed{\frac{u^2 + 3v^2}{(u^2 + v^2)v}}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \operatorname{grad} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \operatorname{grad} \frac{1}{2}(uv)^2 = \mathbf{e}_u \frac{1}{h_u} \underbrace{\partial_u \left(\frac{1}{2} u^2 v^2 \right)}_{uv^2} + \mathbf{e}_v \frac{1}{h_v} \underbrace{\partial_v \left(\frac{1}{2} u^2 v^2 \right)}_{u^2 v} \\ &= \boxed{\frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} (v \mathbf{e}_u + u \mathbf{e}_v)} \end{aligned}$$

5. (a) Med Eulerekvationen och $\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial_j u_j = 0$,

$$\partial_t(\rho u_i) = - \underbrace{\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i}_{\rho u_j \partial_j u_i = \partial_j(\rho u_i u_j)} - \partial_i p = -\partial_j(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p) = -\partial_j T_{ij}$$

där $\boxed{T_{ij} = \rho u_i u_j + \delta_{ij} p}$.

(b) Ledningen och Eulerekvationen ger

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla(|\mathbf{u}|^2/2) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla p/\rho = -\nabla(|\mathbf{u}|^2/2) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla p/\rho.$$

Detta ger

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \partial_t(\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times \partial_t \mathbf{u} = \nabla \times (-\nabla(|\mathbf{u}|^2/2) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla p/\rho) = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$$

$$\text{p.g.a. } \nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \text{ och } [\nabla \times \partial_t \mathbf{u}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_t u_k = \partial_t \epsilon_{ijk} \partial_j u_k = [\partial_t \nabla \times \mathbf{u}]_i.$$

Beviset av resultatet i ledningen:

$$[\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]_i = \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m = (\dots) = u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i = [\nabla(|\mathbf{u}|^2/2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i$$

$\Leftrightarrow$ ekvationen i ledningen. v.s.v.

6. (a) $\mathbf{j} = -\lambda \operatorname{grad} T$ där $\lambda > 0$ är en materialkonstant. $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ (följer från

$$\oint \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV = 0$$

för godtyckliga volymen V).

$$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{j} = -\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T = -\lambda \Delta T = 0 \text{ (p.g.a. } \Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}) \Rightarrow \Delta T = 0.$$

(b) $T(R_1) = T_1$, $T(R_2) = T_2$, $\Delta T = (1/\rho)\partial_\rho(\rho\partial_\rho T(\rho)) = 0 \Rightarrow \rho\partial_\rho T(\rho) = c_0 \Rightarrow \partial_\rho T(\rho) = c_0/\rho + c_1$ med integrationskonstanter c_0 och c_1 som bestäms av villkoren $T(R_1) = T_1$, $T(R_2) = T_2$:

$$\boxed{T(\rho) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln(\rho/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}}.$$

(c) $\mathbf{j} = -\lambda \text{grad } T = \mathbf{e}_\rho \lambda (T_1 - T_2) / [\ln(R_2/R_1)\rho]$, $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho \rho d\varphi dz$, $\rho = R_2$, $0 < \varphi < 2\pi$ och $0 \leq z \leq h$, ger

$$\begin{aligned} \text{Värme per tidsenhet} &= \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\rho \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(R_2/R_1)R_2} \cdot \mathbf{e}_\rho R_2 d\varphi dz \\ &= \boxed{\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(R_2/R_1)} 2\pi h}. \end{aligned}$$