



**SF1681 Linjär algebra, fk**  
**Tentamen**  
**9 januari 2020**

Skrivtid: 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

| Del | Poäng | Innehåll              | Fx | E | D | C | B | A  |
|-----|-------|-----------------------|----|---|---|---|---|----|
| I   | 12    | Grundläggande problem | 7  | 8 | 8 | 8 | 8 | 8  |
| II  | 8     | Begrepp och satser    | 4  | 4 | 4 | 6 | 6 | 6  |
| III | 16    | Avancerade problem    | 0  | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt  $V = P_{10}$  vara vektorrummet av polynom av grad högst 10 med komplexa koefficienter (kallas  $\mathbb{C}_{10}[x]$  i kursboken). Definiera  $L: V \rightarrow V$  genom  $L(p(x)) = xp'(x) + p(1)$ . Bestäm alla egenvärden och egenrum till  $L$ . Är  $L$  diagonaliserbar? **(4 p)**

2. Låt  $V = C^\infty([0, 1])$  vara de oändligt deriverbara komplexvärda funktionerna på  $[0, 1]$  med inre produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt, \quad \text{för alla } f, g \text{ i } V.$$

Låt  $L: V \rightarrow V$  ges av  $L(f(t)) = f(t)e^{it}$ . Är  $L$  självdjungerad? Är  $L$  unitär? **(4 p)**

3. Låt  $V = \mathbb{C}^3$  och låt  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ .

- (a) Visa att det finns en unik linjär avbildning  $L: \bigwedge^2 V \rightarrow \mathbb{C}$  sådan att  $L(x \wedge y) = x^T A y$  för alla  $x, y \in V$ . **(2 p)**
- (b) Bestäm en bas för kärnan till  $L$ . **(2 p)**

## DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Låt  $V$  vara ett vektorrum och  $W$  ett delrum. Låt  $v_1, v_2 \in V$  vara två vektorer. När är  $q(v_1) = q(v_2)$  där  $q: V \rightarrow V/W$  är kvotavbildningen? **(1 p)**
- (b) Låt  $L: V \rightarrow U$  vara en linjär avbildning mellan vektorrum. Formulera *isomorfi-satsen* för  $L$  (den säger något om  $L$  och kvotrum). **(1 p)**
- (c) Låt  $V$  vara ett ändligtdimensionellt inre-produktrum och  $W$  ett delrum. Definiera en avbildning  $\Phi$  mellan  $W^\perp$  och  $V/W$  och visa att  $\Phi$  är en isomorfi. **(2 p)**
5. Låt  $V$  vara ett ändligtdimensionellt komplext inre-produktrum och  $L$  en operator på  $V$ .
- (a) Vad menas med den *adjungerade operatoren*  $L^\dagger$  till  $L$ ? Vad innebär det att  $L$  är *själv-adjungerad*? **(1 p)**
- (b) Visa att om  $L$  är självadjungerad så har  $V$  en ortogonal bas bestående av egenvektorer till  $L$ . *Tips: använd induktion på  $\dim V$ .* **(2 p)**
- (c) Ge ett exempel på ett inre-produktrum  $V$  som ovan med en operator  $L$  som har en ortogonal bas av egenvektorer men som inte är självadjungerad. **(1 p)**

## DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt  $A$  vara  $4 \times 4$ -matrisen med element i  $\mathbb{Z}_2$  (dvs heltalen modulo 2) som ges av:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Låt  $S$  vara delrummet av  $4 \times 4$ -matriser som ges av  $S = \{p(A) : p(x) \text{ är ett polynom med koefficienter i } \mathbb{Z}_2\}$ . Bestäm antalet element i  $S$ . Utgör  $S$  en kropp? **(4 p)**

7. Låt  $x_0, x_1, x_2, \dots$  vara en följd av heltal som uppfyller att  $x_0 = -5$  och  $x_1 = 2$  samt att  $x_n = -2x_{n-1} - x_{n-2}$  för  $n \geq 2$ . Bestäm  $x_{2020}$ . **(4 p)**

8. Låt  $P_1$  vara vektorrummet av polynom av grad högst 1 med reella koefficienter. Vi ger  $P_1$  och  $P_1 \otimes P_1$  de inre produkterna som bestäms av:

$$\langle p_1 | p_2 \rangle = p_1(0)p_2(0) + p_1'(0)p_2'(0), \quad \text{för alla } p_1, p_2 \in P_1,$$

$$\langle p_1 \otimes q_1 | p_2 \otimes q_2 \rangle = \langle p_1 | p_2 \rangle \langle q_1 | q_2 \rangle, \quad \text{för alla } p_1, q_1, p_2, q_2 \in P_1.$$

Låt  $L: P_1 \otimes P_1 \rightarrow P_1$  vara den linjära avbildning som uppfyller  $L(p \otimes q) = pq' + p(0)q$ .

- (a) Bestäm ortonormala baser till  $P_1$  och  $P_1 \otimes P_1$  och bestäm matrisen för  $L$  med avseende på dessa baser. **(1 p)**
- (b) Bestäm singularvärdena till  $L$  samt höger- och vänstersingularvektorer till det största singularvärdet. **(3 p)**

9. Låt  $V$  vara ett komplext vektorrum av dimension  $n$  och  $L$  en operator på  $V$ . Visa att  $L$  är diagonaliserbar om och endast om minimalpolynomet  $q_L(t)$  är en produkt av distinkta linjära faktorer, dvs om och endast om

$$q_L(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)$$

för något heltal  $r$  och  $\lambda_i \neq \lambda_j$  för alla  $i \neq j$ . **(4 p)**