

SF1544 TENTAMEN, DEL 2
Torsdag 17 mars 2022 kl 8.00-11.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd. Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. Givet $f(x) = axe^{-bx^2}$ vill vi bestämma koefficienterna a och b så att

$$f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2}.$$

(4 p) a) Ställ upp det icke-linjära ekvationssystemet som behöver lösas.

Ekvationssystemet blir

$$\begin{aligned} ae^{-b} &= 1 \\ 2ae^{-4b} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(5 p) b) Formulera Newtons metod för systemet. Ange explicita uttryck för alla element i funktionerna som ingår.

Låt $F(a, b) = \begin{bmatrix} ae^{-b} - 1 \\ 2ae^{-4b} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Motsvarande Jacobian-matrisen är $J(a, b) = \begin{bmatrix} e^{-b} & -ae^{-b} \\ 2e^{-4b} & -8ae^{-4b} \end{bmatrix}$.

Newton's metod för systemet blir då

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} - J(a_n, b_n)^{-1} F(a_n, b_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

med J och F som ovan och given en startgissning $\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$.

- (2 p) c) En bra startgissning för b är $b_0 = 0.5$. Använd figur 1 nedan som visar grafen för $e^{-0.5x^2}$ för att bestämma en bra startgissning för a . Motivera ditt val!

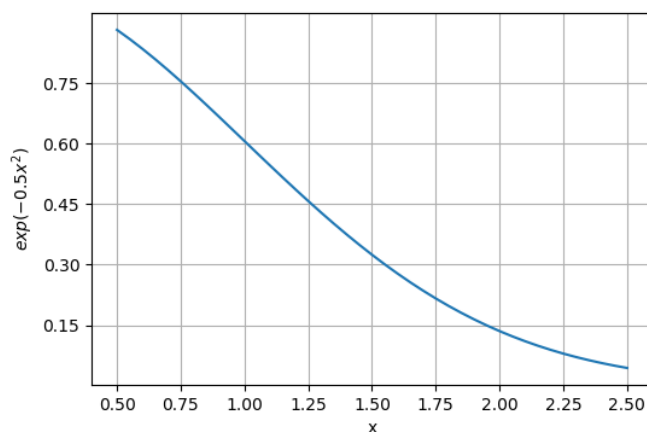


Figure 1: Grafen till $e^{-0.5x^2}$.

Vi vill helst välja a så att $f(1)|_{b=b_0} - 1 = 0$ dvs om $x_1 = 1$ så ska

$$ax_1 e^{-b_0 x_1^2} = 1.$$

Från figuren ser man att $e^{-0.5x_1^2} \approx 0.6$. Då får man sambandet

$$ax_1 e^{-b_0 x_1^2} = 0.6a = 1,$$

därför blir $a = 1/0.6 = 5/3$, så startgissningen blir $a_0 = 5/3$.

Man kan kontrollera att $a = 5/3$ också ger $f(2)|_{b=b_0} - 1/2 \approx 0$. För $x_2 = 2$ ser man i figuren att $e^{-0.5x_2^2} \approx 0.15$ (ungefär). Då får man

$$ax_2 e^{-b_0 x_2^2} = 2 \cdot 0.15a = 0.3a = 1/2,$$

vilket ger samma a .

- (6 p) d) Skriv ett Matlab-program som använder Newtons metod för att bestämma a och b . Svaret ska ha ett fel som är mindre än 10^{-8} i alla komponenter. Använd startgissningen från c). Om du inte löst deluppgift c) använd $a_0 = 1$ som startgissning.

Vi väljer stoppkriteriet att $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-8}$ (Det går också att välja $|F(a, b)| < 10^{-8}$). Kod:

```

F = @(a, b) [a*exp(-b) - 1; 2*a*exp(-4*b) - 1/2];
J = @(a, b) [exp(-b), -a*exp(-b); 2*exp(-4*b), -8*a*exp(-4*b)];

x = [1; 0.5];
dx = [1,1];
tol = 1e-8;

while norm(dx) > tol
    a = x(1);
    b = x(2);

    dx = J(a,b)\F(a, b);
    x = x - dx;
end

```

P2. En partikels bana ges av

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2, \\ y(t) = \sin(t). \end{cases}$$

Vi är intresserade av att beräkna längden L av banan för $0 \leq t \leq 1$ genom följande integral

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

- (5 p) a) Skriv ett Matlab-program som beräknar integralen med hjälp av trapetsregeln. Använd en valfri steglängd h .

Integralen vi vill beräkna blir $\int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + \cos^2(t)} dt$.

```
f = @(t) sqrt( (2*t).^2 + (cos(t)).^2 );
```

```
% interval borders
```

```
a = 0; b = 1;
```

```
N = 100; % number of intervals
```

```
h = (b-a) / N; % interval length divided by N
```

```
xj = a:h:b; %quadrature points x_j
```

```
% composite trapezoidal rule:
```

```
Qf = (h/2) * ( 2 * sum( f( xj ) ) - f( a ) - f( b ) )
```

(10 p) b) Givet L vill vi nu istället beräkna mittpunkten t_m på kurvan så att

$$\int_0^{t_m} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \frac{L}{2}.$$

Beskriv en effektiv algoritm för att bestämma t_m (Matlab-kod behövs ej).

Tips: Definiera $g(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt - L/2$.

Vi vill lösa ekvationen $g(t_m) = 0$. Detta kan göras med Newtons metod. Vi har

$$g(t_m) = \int_0^{t_m} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt - L/2$$

och vi vill lösa $g(t_m) = 0$. Integralen i g kan beräknas med hjälp av trapetsregeln i a)-uppgiften. Vi behöver nu derivatan

$$g'(t_m) = \sqrt{x'(t_m)^2 + y'(t_m)^2} = \sqrt{(2t_m)^2 + \cos^2(t_m)}.$$

Newtons metod kan nu ställas upp som

$$t_{k+1} = t_k - g(t_k)/g'(t_k)$$

för lämpligt startvärde. Vi kan t.ex. välja $t = 0.5$ som ligger i mitten på intervallet $[0, 1]$.

Alternativ uppgift P2. (15p) Härled en feluppskattning av det lokala felet för Eulers metod.

För härledning av lokala felet, se sidorna 294-295 i boken Sauer.

P3. Nedböjningen, w , av en balk med jämnfördelad last och stöd i båda ändar ges av lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= \alpha w + \beta x(x - l), \quad 0 < x < l, \\ w(0) &= 0, \\ w(l) &= 0. \end{aligned}$$

Där α och β är givna materialspecifika parametrar. Balkens längd är l .

- (4 p) a) Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas när man använder finita differensmetoden med central differens för att approximera $\frac{d^2w}{dx^2}$. Var noga med att definiera alla ingående storheter i ditt linjära ekvationssystem.

Låt $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ vara en indelning av intervallet $[0 \quad l]$, där $h = l/N$. Inför den approximativa lösningen $w_i \approx w(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ och ersätt andraderivatan i randvärdesproblemet med en central differensapproximation. Det diskretiserade problemet blir:

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = \alpha w_i + \beta x_i(x_i - l), \quad i = 1, \dots, N-1$$

Randvillkoren ger att $w_0 = 0$ och $w_N = 0$. I matrisform får vi ett linjärt ekvationssystem

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b},$$

där

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \left(-\alpha - \frac{2}{h^2}\right) & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \left(-\alpha - \frac{2}{h^2}\right) & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & \left(-\alpha - \frac{2}{h^2}\right) & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{h^2} & \left(-\alpha - \frac{2}{h^2}\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta x_1(x_1 - l) \\ \vdots \\ \beta x_{N-1}(x_{N-1} - l) \end{bmatrix}.$$

- (6 p) b) Skriv ett Matlab-program som löser problemet med steglängden $h = 0.1$. Programmet ska även plotta grafen $w(x)$ i det givna intervallet.

```
l = 1;
alpha = 1;
beta = 2;
N = 10;
```

```

h = 1/N;
X = (h:h:1-h)';
D = (-alpha-2/h^2)*ones(N-1,1);
Dl = 1/h^2*ones(N-2,1);
Du = 1/h^2*ones(N-2,1);
A = diag(D) + diag(Dl,-1) + diag(Du,1);
b = X.*(X-1);
W = A\b;
plot([0; X; 1], [0; W; 0], '.-')
grid on
xlabel('x'); ylabel('w(x)')
set(gca,'FontSize',18)

```

- (4 p) c) Utöka Matlab-programmet i del b) så att det beräknar värdet $w(l/2)$ med ett fel som är mindre än en given tolerans, τ .

```

tau = 1e-6;
l = 1;
alpha = 1;
beta = 2;
w_half = 1;
w_half_old = 2;
iter = 0;
N = 100;

while abs(w_half - w_half_old) > tau
    h = 1/N;
    X = (h:h:1-h)';
    D = (-alpha-2/h^2)*ones(N-1,1);
    Dl = 1/h^2*ones(N-2,1);
    Du = 1/h^2*ones(N-2,1);
    A = diag(D) + diag(Dl,-1) + diag(Du,1);
    b = X.*(X-1);
    W = A\b;
    w_half_old = w_half;
    w_half = W(N/2);
    iter = iter + 1;
    N = N*2;
end

disp(strcat('The value of w(l/2) with a tolerance less than "',

```

```
num2str(tau), ' is: '))
w_half
```

- (4 p) d) En modell för nedböjningen av balken ges av

$$w(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3(x-l)x + c_4.$$

Skriv ett program som använder resultatet från del b) för att bestämma koeficienterna a, c_1, c_2, c_3 och c_4 .

```
l = 1;
alpha = 1;
beta = 2;
N = 100;
h = 1/N;
X = (h:h:l-h)';
D = (-alpha-2/h^2)*ones(N-1,1);
Dl = 1/h^2*ones(N-2,1);
Du = 1/h^2*ones(N-2,1);
A = diag(D) + diag(Dl,-1) + diag(Du,1);
b = X.*(X-1);
W = A\b;
CC = ones(5,1);

% Gauss Newton algorithm
for i = 1:3
    J = [exp(CC(5)*X) exp(-CC(5)*X) X.*(X-1) ones(N-1,1)
          CC(1)*X.*exp(CC(5)*X)-CC(2)*X.*exp(-CC(5)*X)];
    r = -W + CC(1).*exp(CC(5)*X) + CC(2).*exp(-CC(5)*X) +
          CC(3)*X.*(X-1) + CC(4);
    CC = CC - J\r;
end

% Model fit
W2 = CC(1)*exp(CC(5)*X) + CC(2)*exp(-CC(5)*X) + CC(3)*X.*(X-1) + CC(4);
plot(X,W-W2,'.-')

c1 = CC(1)
c2 = CC(2)
c3 = CC(3)
```

c4 = CC(4)
a = CC(5)