

TENTAMEN, DEL 2
SF1544
NUMERISKA METODER, GRUNDKURS
Tisdag 4 juni 2024 kl 14.00-17.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd.

Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

(15p) 1. Funktionen

$$g(x) = (x - 1)^4 + 1$$

har fixpunkterna $\bar{x} = 1$ och $\bar{x} = 2$.

Betrakta fixpunktsiterationen

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

med startgissning x_0 .

- a) (4p) För de två fixpunkterna, visa att de verkligen är fixpunkter och bestäm om fixpunktsiterationen konvergerar lokalt eller om den divergerar.
- b) (8p) För alla startgissningar i intervallet $0 < x < 3$, avgör om fixpunktsiterationen konvergerar, och i så fall mot vilken fixpunkt, eller om den divergerar.
- c) (3p) Skriv Matlabkod som plottar $g(x)$ och x som funktion av x , så att fixpunkterna syns i plotten. För en startgissning $x_0 = 3/2$, gör 10 iterationer. I varje iteration, markera $(x_n, g(x_n))$ med ett $\times$ i figuren.

(15 p) 2. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -14.00 \\ -9x_1 + 20x_2 = 144.00 \end{cases}$$

har lösningen $x_1 = 4$ och $x_2 = 9$. Antag att högerledets komponenter är korrekt avrundade, vad blir då felgränsen för x_1 och x_2 ?

Alternativ uppgift P2. Formulera och bevisa en sats om konditionstal för lösning av linjära ekvationsystem. *Notera:* Formulera satsen först och definiera alla kvantiteter och specificera alla antaganden (6p). Bevisa därefter satsen (9p).

Lös antingen P2 eller alternativa uppgift P2, inte båda. Om lösningar till den alternativa uppgiften lämnas in är det de som kommer bedömas.

(20 p) 3. Betrakta följande partiella differentialekvation (PDE)

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 2u_{xx}(x, t) - 2u_x(x, t) + u(x, t) & \text{för } x \in (0, 1) \text{ och } t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{för } t \geq 0 \text{ (randvillkor)}, \\ u(x, 0) = 1 + x + e^{\sin(2\pi x)} & \text{för } x \in [0, 1] \text{ (initialvillkor)}. \end{cases} \quad (\dagger)$$

Diskretisera x -variabeln med punkterna $x_j = j\Delta x$ där $\Delta x := 1/N$ för $j = 0, \dots, N$ och approximera u_x och u_{xx} i $(\dagger)$ med följande finita differenser av noggrannhetsordning 2:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &\approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \\ u_{xx}(x, t) &\approx \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Vi kan nu skriva om $(\dagger)$ som ett initialvärdesproblem för ordinära differentialekvationer (ODE) på formen

$$\begin{cases} \frac{d\vec{w}}{dt} = \mathbf{A}\vec{w} + \vec{b} & \text{för } t \geq 0, \\ \vec{w}(0) = \vec{w}_0 \end{cases} \quad (\ddagger)$$

där $\vec{w}(t) = [w_1(t) \ \dots \ w_{N-1}(t)]^\top$ med $w_j(t) \approx u(x_j, t)$, $t \geq 0$.

- a) (8p) Bestäm den 1a raden i $(N-1) \times (N-1)$ matrisen $\mathbf{A}$.
- b) (8p) Hur förändras 1a raden i $\mathbf{A}$ i $(\ddagger)$ om randvillkoren i $(\dagger)$ ges som $u_x(0, t) = u(1, t) = 0$ för $t \geq 0$? Du kan här använda någon av följande skeva finita differensstenciler för att approximera derivatan, båda med noggrannhetsordning 2:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &\approx \frac{-u(x + 2\Delta x, t) + 4u(x + \Delta x, t) - 3u(x, t)}{2\Delta x} \\ u_x(x, t) &\approx \frac{3u(x, t) - 4u(x - \Delta x, t) + u(x - 2\Delta x, t)}{2\Delta x} \end{aligned}$$

Observera: Vi utökar inte storleken på matrisen, de obekanta variablerna i $\vec{w}$ är de samma som i uppgift (a).

- c) (4p) Låt $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots$, och låt $\vec{w}^n = \vec{w}(t_n)$. Föreslå en numerisk metod för att tidsstega $(\ddagger)$ som ger en diskretisering i både rum och tid som är numeriskt stabil för alla val av tidssteg $\Delta t > 0$ oberoende av Δx . Skriv ut den diskretisering som fås då denna appliceras på $(\ddagger)$ med $\vec{b} = 0$.