

Lösningar till problemtentamen SG1112, 3/6, 2024

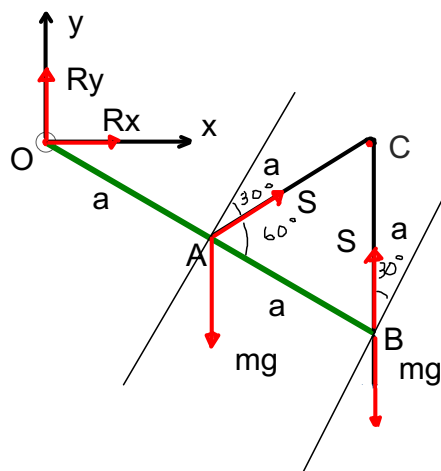
1. Momentjämvikt med avseende på O ger

$$S \cos 30^\circ a - mg \cos 30^\circ + S \cos 30^\circ 2a - mg \cos 30^\circ 2a = 0 \Rightarrow S = mg \quad (1)$$

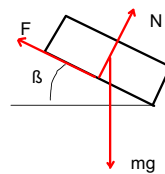
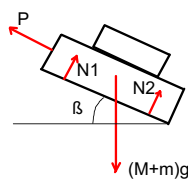
Kraftjämvikt i x- och y-led ger

$$R_x + S \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow R_x = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg \quad (2)$$

$$R_y + S - 2mg + S \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow R_y = \frac{1}{2}mg \quad (3)$$



2. Frilägg vagnen plus klossen (se figur). Newtons andra lag parallellt med



planet ger

$$(M + m)a = P - (M + m)g \sin \beta \Rightarrow a = \frac{P}{M + m} - g \sin \beta \quad (4)$$

Frilägg klossen (se figur). Newtons andra lag parallellt med planet ger

$$ma = F - mg \sin \beta \Rightarrow F = \frac{mP}{M+m} \quad (5)$$

Newtons andra lag normalt mot planet ger

$$0 = N - mg \cos \beta \Rightarrow N = mg \cos \beta \quad (6)$$

Villkoret på friktionstalet ges nu av

$$F \leq \mu N \Rightarrow \mu \geq \frac{P}{(M+m)g \cos \beta} \quad (7)$$

3. Den potentiella energin för pärlan ges av

$$V = mgR \cos \theta + 2\frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = mgR \cos \theta + kR^2\theta^2 \quad (8)$$

där $\Delta l = R\theta$ är förlängningen av den högra fjädern (eller förkortningen av den vänstra). Energiekvationen ger nu

$$mgR \cos \theta_0 + kR^2\theta_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta + kR^2\theta^2 \quad (9)$$

$$v = \sqrt{2gR(\cos \theta_0 - \cos \theta) + \frac{2kR^2}{m}(\theta_0^2 - \theta^2)} \quad (10)$$

Med $v = R\dot{\theta}$ kan energiekvationen också skrivas

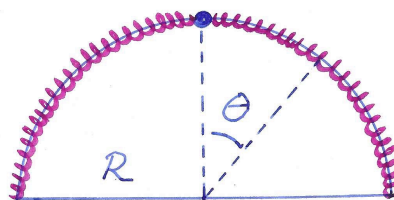
$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = -mgR \cos \theta - kR^2\theta^2 + mgR \cos \theta_0 + kR^2\theta_0^2 \quad (11)$$

Derivera med avseende på tiden

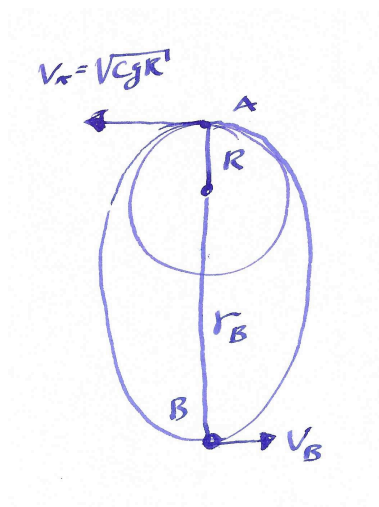
$$mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgR \sin \theta \dot{\theta} - 2kR^2\theta\dot{\theta} \quad (12)$$

Detta ger

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta - \frac{2k}{m}\theta \quad (13)$$



4. Rörelsemängdmomentets bevarande ger



$$v_A R = v_B r_B \Rightarrow v_B = \frac{R}{r_B} v_A \quad (14)$$

Med $v_A = \sqrt{cgR}$ kan energiekvationen skrivas som

$$\frac{1}{2} mcgR - \frac{mgR^2}{R} = \frac{1}{2} m \frac{R^2}{r_B^2} cgR - \frac{mgR^2}{r_B}, \quad (15)$$

$$(2 - c)r_B^2 - 2Rr_B + cR^2 = 0 \quad (16)$$

$$r_B^2 - \frac{2R}{2 - c} r_B + \frac{cR^2}{c + 2} = 0 \quad (17)$$

Lösningen ges av pq-formeln

$$r_B = \frac{R}{2 - c} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(2 - c)^2} - \frac{cR^2}{2 - c}} = \frac{R}{2 - c} \pm \sqrt{\frac{R^2(c - 1)^2}{(2 - c)^2}} = \frac{R \pm R(c - 1)}{2 - c} \quad (18)$$

där minustecknet ger lösning $r = r_A = R$ och plustecknet ger lösningen

$$r_B = \frac{c}{2 - c} R \quad (19)$$

Halva storaxelns längd ges nu av

$$2a = R + r_B = \frac{2R}{2 - c} \Rightarrow a = \frac{R}{2 - c} \quad (20)$$

Excentriciteten bestäms genom

$$R = a(1 - e) \Rightarrow e = c - 1 \quad (21)$$

Slutligen fås halva lillaxelns längd

$$b = a\sqrt{1 - (c - 1)^2} = \sqrt{\frac{c}{2 - c}} R \quad (22)$$

En alternativ lättare lösning fås om vi utnyttjar att vi känner den totala energin för en elliptisk bana

$$E = -\frac{mgR^2}{2a} \quad (23)$$

Energin i A är given och vi får

$$\frac{1}{2}mcgR - \frac{mgR^2}{R} = -\frac{mgR^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{R}{2 - c} \quad (24)$$

Det längsta avståndet bestäms sedan av ekvation (20), excentriciteten av ekvation (21) och b av ekvation (22).