

SK1104 Klassisk fysik

Lösningsförslag till tentamen

Onsdagen den 5 juni, 2024, 8:00-10:30

Del A - 1p per deluppgift

1a) Parallellkoppling mellan resistorna R och $3R$ samt mellan $4R$ och $8R$ ger att motsvarande ersättningsresistorer blir

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R} \Rightarrow R_1 = \frac{3}{4}R$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{8R} = \frac{3}{8R} \Rightarrow R_2 = \frac{8}{3}R$$

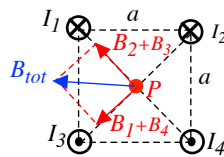
Spänningsdelning ger sedan att

$$U_{ut} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{\frac{8}{3}R}{\frac{3}{4}R + \frac{8}{3}R} U = \frac{32}{41} U \Rightarrow U_{ut} = 19,5 \text{ V}$$

b) Eftersom ledarna ingår i en kraftförsörjning är det rimligt att anta de kan betraktas som raka och långa. Magnetfältet kring en lång rak ledare i punkten P på avståndet $r = \sqrt{2}a/2$ från en ensam ledare blir då

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}a} \Rightarrow B_\varphi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{\pi\sqrt{2} \cdot 0,040} \text{ T} = 0,14 \text{ mT}$$

Betrakta nu riktningarna hos magnetfälten från vardera ledaren, vilka visas i figuren nedan



Ur geometrin får vi att

$$B_1 + B_4 = 0,28 \text{ mT} \quad ; \quad B_2 + B_3 = 0,28 \text{ mT} \quad \Rightarrow \quad B_{tot} = \sqrt{2} \cdot 0,28 \text{ mT} = 0,40 \text{ mT}$$

c) Intensiteten hos en cosinusformad elektromagnetisk våg kan beräknas som tidsmedelvärdet av Poyntings vektor och kan skrivas

$$I = S_{av} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} \Rightarrow E_{max} = \sqrt{2\mu_0 c I}$$

Insättning av värden ger att

$$E_{max} = \sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} \text{ V/m} = 0,87 \text{ V/m}$$

Eftersom de elektriska och magnetiska fälten hos en våg är kopplade till varandra, har vi även att

$$E_{max} = cB_{max} \Rightarrow B_{max} = \frac{E_{max}}{c} \Rightarrow B_{max} = \frac{0,87}{2,9979 \cdot 10^8} \text{ T} = 2,9 \text{ nT}$$

Del B - 4p per uppgift

2. Enligt uppgiften får vi anta att fältet är vertikalt och med en konstant laddningstäthet borer det enbart av höjden. Enligt Gauss lag har vi att:

$$\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0}$$

där $Q = \rho V$ är den inneslutna laddningen, V är den inneslutna volymen och ρ är den genomsnittliga laddningstätheten med hänsyn tagen till både positiva och negativa laddningar. Enligt uppgiften har vi således att $\rho = \rho_+ - \rho_- = 600 \text{ cm}^3$. Vi väljer en vertikal cylinder som Gaussyta, vilken har två ändytor med areorna $A_1 = A_2 = A$ samt en mantelyta med arean A_m . Den undre ändytan ligger på jordytan där det elektriska fältet är 120 V/m riktat nedåt (dvs ut från Gaussytan). Anta att den övre ändytan ligger på höjden h över jordytan och där är det elektriska fältet lika med noll enligt uppgiften. Gauss lag ger då att

$$\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{A_u} \vec{E} \cdot d\vec{A}_u + \iint_{A_{\bar{u}}} \vec{E} \cdot d\vec{A}_{\bar{u}} + \iint_{A_m} \vec{E} \cdot d\vec{A}_m = EA + 0 + 0 = EA$$

där vi har utnyttjat att det elektriska fältet är riktat nedåt och således vinkelrätt mot mantelytans normalriktning.

$$\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho Ah}{\epsilon_0} \Rightarrow h = \frac{\epsilon_0 E}{\rho}$$

Insättning av värden ger att

$$h = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 120}{600 \cdot 10^6 \cdot 1,60219 \cdot 10^{-19}} \text{ m} = 11 \text{ m}$$

3. a) Vi börjar med att beräkna strömmen genom ledarna, vilken fås ur

$$P = V_{ab} \cdot I \Rightarrow I = \frac{P}{V_{ab}} \Rightarrow I = \frac{10 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 10^3} \text{ A} = 6,67 \text{ kA}$$

För att beräkna magnetfältet använder vi oss av Ampere's lag.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{innesluten}$$

i samtliga fall använder vi oss av en kontur C i form av en cirkel med centrum i ledarens centrum och med radien r . Vi har tre olika fall:

Fall I: $0 < r < r_i = 13,5$ mm

I detta fall finns det ingen omsluten ström och Ampere's lag ger således att magnetfältet blir noll.

Fall II: $r_i < r < r_y = 17$ mm

Ampere's lag applicerad på en omslutande cirkel C med en radie r som ligger mellan de båda ledarna ger att

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{innesluten}} \Rightarrow 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

eftersom symmetrin i problemet kräver att fältet måste ligga i φ -riktningen och vara konstant på radien r från centrum av kabeln. Speciellt gäller att:

$$B(r_i) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6,67 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 13,5 \cdot 10^{-3}} \text{ T} = 99 \text{ mT}$$

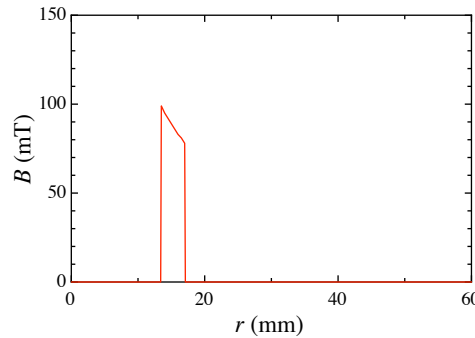
samt

$$B(r_y) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6,67 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 17 \cdot 10^{-3}} \text{ T} = 78 \text{ mT}$$

Fall III: $r > r_y = 17$ mm

I detta fallet är den omsluten strömmen $I_{\text{omsluten}} = I - I = 0$ A, varför magnetfältet enligt Ampere's lag då också blir noll.

Sammantaget ger detta följande figur i intervallet $0 < r < 50$ mm.



b) Vi får en hyfsad god approximation av energin om vi antar att magnetfältet är konstant mellan den inre och den yttre radien. I detta fallet har vi att

$$E = V \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} = 2\pi r L \cdot (r_y - r_i) \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 L \cdot (r_y - r_i)}{4\pi r}$$

där volymen mellan de båda ledarna ungefärligen är $V = 2\pi r L \cdot (r_y - r_i)$. För att vara konsekventa i approximationen använder vi sedan medelradien $r = (r_y + r_i)/2$, vilket ger att

$$E = \frac{\mu_0 I^2 L \cdot (r_y - r_i)}{2\pi(r_y + r_i)}$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$E = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (6,67 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^3 \cdot (17 - 13,5) \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot (17 + 13,5) \cdot 10^{-3}} \text{ J} = 1,0 \text{ kJ}$$

En noggrannare beräkning kräver en volymintegral över volymen mellan de båda ledarna. Detta ger att

$$E = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dV = L \cdot \iint \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} r d\varphi dr = 2\pi L \cdot \int_{r_i}^{r_y} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r} dr = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \ln \frac{r_y}{r_i}$$

Insättning ger samma resultat som ovan, dvs $E = 1,0 \text{ kJ}$.

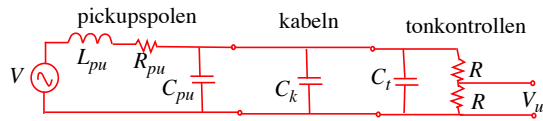
4. a) Eftersom poickup-kretsen är en $L - R - C$ -krets, uppträder resonans när

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Insättning av värden för pickup-spolen ger att

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{1,51 \cdot 221 \cdot 10^{-12}}} \text{ Hz} = 8,7 \text{ kHz}$$

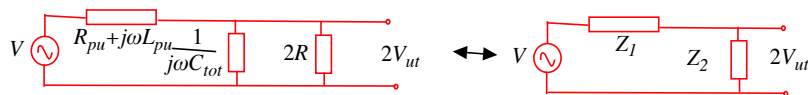
b) För att beräkna resonansfrekvensen för hela kretsen, börjar vi med att rita upp en ekvivalent krets för hela systemet när $R_t = 0 \Omega$.



De tre kondensatorerna i kretsen är parallellkopplade och därför ger de upphov till en total kapacitans på $C_{tot} = C_{pu} + C_k + C_t$, vilket med en 3,0 m lång kabel ger att $C_{tot} = (221 + 3 \cdot 120 + 220) \text{ pF} = 801 \text{ pF}$. De båda parallellkopplade resistorerna R påverkar inte resonansfrekvensen nämnvärt (inga reaktiva element), vilket betyder att

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{pu}C_{tot}}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{1,51 \cdot 801 \cdot 10^{-12}}} \text{ Hz} = 4,6 \text{ kHz}$$

c) Spänningsdelning i den högra delen av kretsen ger direkt att spänningen över båda resistorerna $2R$ är $2V_{ut} = 150 \text{ mV}$. Vi kan nu rita om kretsen med hjälp av $j\omega$ -metoden.



Här har vi att impedansen $Z_1 = R_{pu} + j\omega L_{pu}$ och att impedansen Z_2 ges via formeln för parallellkoppling av impedanser

$$\frac{1}{Z_2} = j\omega C_{tot} + \frac{1}{2R} = \frac{1 + 2j\omega RC_{tot}}{2R} \Rightarrow Z_2 = \frac{2R}{1 + 2j\omega RC_{tot}}$$

Spänningsdelning ger att

$$2\check{V}_{ut} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \check{V} \Rightarrow \check{V} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \cdot 2\check{V}_{ut} = \left(2 + \frac{2Z_1}{Z_2}\right) \check{V}_{ut}$$

Insättning av Z_1 och Z_2 ger att

$$\begin{aligned} \check{V} &= \left(2 + \frac{2(R_{pu} + j\omega L_{pu})}{2R} \cdot \frac{1}{1 + 2j\omega RC_{tot}}\right) \check{V}_{ut} = \left(2 + \frac{(R_{pu} + j\omega L_{pu})(1 + 2j\omega RC_{tot})}{R}\right) \check{V}_{ut} = \\ &= \left(2 + \frac{R_{pu}}{R} - 2\omega^2 L_{pu} C_{tot} + j\omega \left(\frac{L_{pu}}{R} + 2R_{pu} C_{tot}\right)\right) \check{V}_{ut} \end{aligned}$$

När strängen svänger med frekvensen $f = 329,6$ Hz, har vi att $\omega = 2\pi f = 2071$ rad/s, vilket i sin tur ger att

$$\begin{aligned} \check{V} &= \left(2 + \frac{7,02 \cdot 10^3}{250 \cdot 10^3} - 2 \cdot 2071^2 \cdot 1,51 \cdot 801 \cdot 10^{-12} + \right. \\ &\quad \left. + j \cdot 2071 \cdot \left(\frac{1,51}{250 \cdot 10^3} + 2 \cdot 7,02 \cdot 10^3 \cdot 801 \cdot 10^{-12}\right)\right) \cdot 75 \text{ mV} = \\ &= (2,018 + j \cdot 0,036) \cdot 75 \text{ mV} \end{aligned}$$

Detta medför att amplituden hos den inducerade spänningen är

$$V = |\check{V}| = \sqrt{2,018^2 + 0,036^2} \cdot 75 \text{ mV} = 151 \text{ mV}$$