

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN, DEL 2

SF1544

NUMERISKA METODER, GRUNDKURS

Onsdag 13 mars 2024 kl 14.00-17.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd. Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. Nedanstående differentialekvation beskriver positionen $y(t)$ vid tiden t för ena änden av en dämpad icke linjär fjäder,

$$y''(t) = -ay^3(t) - by'(t) + c \sin(\omega t),$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

där a, b, c och ω är givna positiva konstanter.

- (3 p) a) Skriv ekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Systemet ska skrivas på formen

$$\mathbf{u}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

Det ska klart framgå vad $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}(t, \mathbf{u})$ och $\mathbf{u}_0$ är.

Lösningsförslag

Låt $u(t) = y(t)$, $v(t) = y'(t)$, och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$.

Vi har

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -au^3 - bv + c \sin(\omega t) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(t, \mathbf{u}).$$

med

$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (4 p) b) Antag att $a = b = c = 1$ och $\omega = 10$. Formulera framåt Euler för systemet i a). Använd sedan framåt Euler med valfri steglängd för att beräkna en approximation till $y(t)$ och $y'(t)$ vid tiden $t = 0.1$.

Lösningsförslag

Framåt Euler med steglängd h för systemet i a) ger

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_n \\ -u_n^3 - v_n + \sin(10t_n) \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

med $\mathbf{u}(0) = [0 \ 1]^T$.

För att beräkna en approximation till $y(t)$ och $y'(t)$ vid tiden $t = 0.1$ använder vi $h = 0.1$ och tar ett steg med Eulers metod

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_0 \\ -u_0^3 - v_0 + \sin(10t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0^3 - 1 + \sin(10 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

- (6 p) c) Beskriv en algoritm, gärna i form av ett Matlabprogram, som beräknar en approximation av $y(t)$ och plottar den på intervallet $0 \leq t \leq 10$. Du kan använda samma steglängd som du använde i b).

Lösningsförslag

```
a = 1; b = 1; c = 1; omega = 10;
F = @(t,U) [U(2); -a*U(1)^3-b*U(2)+c*sin(omega*t)];

h = 0.1; % Steglängd
T = 10; % Sluttid
n = T/h; % Antal steg

tvec = 0:h:T;
Uvec = zeros(2,n+1);
t = 0;
U = [0 1]'; % Begynnelsevärden
Uvec(:,1) = U;
for ii = 1:n
    U = U + h*F(t,U);
    Uvec(:,ii+1) = U;
    t = t+h;
end
plot(tvec, Uvec(1,:))
```

P2. Följande randvärdesproblem

$$u''(x) = -u'(x) + 3u(x) + \alpha u^3(x) + x^2 \quad u(0) = 0 \quad u(1) = 1 \quad (1)$$

är givet.

- (6 p) a) Sätt $\alpha = 0$ och formulera finita differensmetoden för problemet. Dela in intervallet $0 \leq x \leq 1$ i 4 delintervall och ställ upp det linjära ekvationssystem $A\vec{u} = \vec{b}$ som måste lösas. Inför lämpliga beteckningar för de variabler du använder och härled uttryck för alla element i matrisen A och i högerledet $\vec{b}$.
Du behöver inte lösa ekvationssystemet men var noga med att definiera alla variabler du använder.

Lösningsförslag

Om vi delar in x -axeln i 4 delintervall mellan $x = 0$ och $x = 1$ får vi att $h = 1/4$ och $x_i = ih$ där $i = 0, 1, 2, 3, 4$. En approximation av (1) när $\alpha = 0$ med andra ordningens centrala differenser ger oss

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - 3u_i = x_i^2 \quad \text{för } i = 1, 2, 3$$

där $u_i \approx u(x_i)$. Denna kan vi skriva om på formen

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)u_{i-1} + \left(\frac{-2}{h^2} - 3\right)u_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)u_{i+1} = x_i^2 \quad \text{för } i = 1, 2, 3$$

Om $\vec{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ kan vi skriva det linjära ekvationssystemet som

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2} - 3 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 \\ \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h^2} - 3 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} \\ 0 & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h^2} - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 - \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} \end{bmatrix}$$

- (3 p) b) Om antal delintervall, N , är stort kommer matrisen A att vara en gles matris. Antag att det tar ca 20 sekunder att lösa systemet $A\vec{u} = \vec{b}$ när $N = 15000$. Ungefär hur lång tid tar det att lösa systemet när $N = 45000$? Motivera ditt svar.

Lösningförslag

För en gles matris gäller att $t \sim N$ vilket betyder att om N ökar med en faktor 3 kommer även tiden att göra det så det kommer att ta ca 60 sekunder.

- (4 p) c) Om $\alpha \neq 0$ får vi ett olinjärt randvärdesproblem att lösa. Sätt $\alpha = 10$ och dela in intervallet $0 \leq x \leq 1$ i 4 delintervall och formulera det olinjära ekvationssystem $F(\vec{u})$ som ska lösas. Alla element i $F(\vec{u})$ ska specificeras.

Lösningförslag

Om vi delar in x -axeln i 4 delintervall mellan $x = 0$ och $x = 1$ får vi att $h = 1/4$ och $x_i = ih$ där $i = 0, 1, 2, 3, 4$. En approximation av (1) när $\alpha = 10$ med andra ordningens centrala differenser ger oss

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - 3u_i - 10u_i^3 = x_i^2 \quad \text{för } i = 1, 2, 3$$

där $u_i \approx u(x_i)$. Denna kan vi nu skriva om på formen

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) u_{i-1} + \left(\frac{-2}{h^2} - 3\right) u_i - 10u_i^3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) u_{i+1} - x_i^2 = 0 \quad \text{för } i = 1, 2, 3$$

Detta utgör ett olinjärt ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) u_0 + \left(\frac{-2}{h^2} - 3\right) u_1 - 10u_1^3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) u_2 - x_1^2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) u_1 + \left(\frac{-2}{h^2} - 3\right) u_2 - 10u_2^3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) u_3 - x_2^2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) u_2 + \left(\frac{-2}{h^2} - 3\right) u_3 - 10u_3^3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) u_4 - x_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

Låt

$$F(\vec{u}) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2, u_3) \\ f_2(u_1, u_2, u_3) \\ f_3(u_1, u_2, u_3) \end{bmatrix}$$

Om vi sätter in randvärdena $u_0 = 0$ och $u_4 = 1$ får vi att

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, u_3) &= \left(\frac{-2}{h^2} - 3\right) u_1 - 10u_1^3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) u_2 - x_1^2 \\ f_2(u_1, u_2, u_3) &= \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) u_1 + \left(\frac{-2}{h^2} - 3\right) u_2 - 10u_2^3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) u_3 - x_2^2 \\ f_3(u_1, u_2, u_3) &= \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) u_2 + \left(\frac{-2}{h^2} - 3\right) u_3 - 10u_3^3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) - x_3^2 \end{aligned}$$

Notera att vi även kan skriva det olinjära systemet som

$$F(\vec{u}) = A\vec{u} + G(\vec{u}), \quad \text{där} \quad G(\vec{u}) = \begin{bmatrix} -10u_1^3 - x_1^2 \\ -10u_2^3 - x_2^2 \\ -10u_3^3 - x_3^2 + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} \end{bmatrix}$$

där A är matrisen definierad i uppgift a).

(7 p)

- d) Formulera Newtons metod för problemet i c). Alla element i matriser och vektorer som används ska specificeras.

Lösningsförslag

Newton's metod för $F(\vec{u}) = \vec{0}$ ges av

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n - J(\vec{u}^n)^{-1}F(\vec{u}^n)$$

där $F(\vec{u})$ är funktionen i c) och $J(\vec{u})$ är dess Jakobianmatris

$$J(\vec{u}) = A + \begin{bmatrix} -30u_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -30u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -30u_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2} - 3 - 30u_1^2 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 \\ \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h^2} - 3 - 30u_2^2 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} \\ 0 & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h^2} - 3 - 30u_3^2 \end{bmatrix}$$

- P3.** Följande tabell anger värden för en funktion $y = f(x)$ i ett antal ekvidistanta värden på x på intervallet $[0, 1]$:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	0	0.24	0.46	0.68	0.87

Vi vill beräkna en approximation till derivatan i intervallets vänstra ändpunkt, dvs $f'(0)$.

(3 p)

- a) Ange en differensformel med noggrannhetsordning 1 för beräkning av $f'(0)$. Beräkna två approximationer till $f'(0)$ genom att tillämpa formeln på värdena i tabellen. Använd steglängderna $h = 0.25$ och $h = 0.5$.

Lösningsförslag

En differensformel med noggrannhetsordning 1 ges av

$$f'(0) \approx D_+(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

och vi får att $D_+(0.25) = (0.24 - 0)/0.25 = 0.96$ och $D_+(0.5) = (0.46 - 0)/0.5 = 0.92$.

(3 p)

- b) För att få högre noggrannhetsordning kan man alternativt använda differensformeln

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} \quad (2)$$

Använd denna formel för att beräkna $f'(0)$ med användning av värdena i tabellen. Använd steglängderna $h = 0.25$ och $h = 0.5$.

Lösningsförslag

Låt

$$f'(0) \approx D_2(h) = \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h}$$

och vi får att $D_2(0.25) = (-0.46 + 4 \cdot 0.24 + 0)/0.55 = 1$ och $D_2(0.5) = (-0.87 + 4 \cdot 0.46 - 0)/1 = 0.97$.

- (3 p) **c)** Antag att man vet det exakta svaret, $f'(0) = 1.01$. Beräkna felen för de två approximativa värdena du räknat fram i **a)**. Verifiera att differensformeln i **a)** har noggrannhetsordning 1.

Lösningsförslag

Felen i a) blir $e_1 = |0.96 - 1.01| = 0.05$ och $e_2 = |0.92 - 1.01| = 0.09$ och vi ser att när h halveras blir minskar felet ungefär med en faktor 2 vilket betyder att vi har noggrannhetsordning 1.

- (3 p) **d)** Gör samma sak som i **c)** men för värdena du räknat fram i **b)** och avgör vilken noggrannhetsordning formeln (2) har.

Lösningsförslag

Felen i c) blir $e_1 = |1 - 1.01| = 0.01$ och $e_2 = |0.97 - 1.01| = 0.04$ och vi ser att när h halveras blir minskar felet ungefär med en faktor 4 vilket betyder att vi har noggrannhetsordning 2.

- (5 p) **e)** Använd Taylorutveckling för att bestämma noggrannhetsordningen för formeln (2).

Lösningsförslag

Taylorutveckla termerna i $D_2(h)$ kring x . Vi får

$$f(x + 2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(x) + O(h^4)$$

och

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + O(h^4)$$

Om vi sätter in dessa i $D_2(h)$ får vi

$$\begin{aligned} D_2(h) &= \frac{1}{2h} \left(-(f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(x) + O(h^4)) \right. \\ &\quad \left. + 4(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + O(h^4)) - 3f(x) \right) \\ &= f'(x) - \frac{1}{3}h^2f^{(3)}(x) + O(h^4)/2h = f'(x) + O(h^2) \end{aligned}$$