



SF1672 Linjär algebra
Tentamen
13 Januari 2022

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Katharina Jochemko

Tentamen består av åtta uppgifter. Del I utgörs av de fem första uppgifterna (Uppgift 1 - 5) som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift i del I ger 4 poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna (Uppgift 6 - 8) och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift i del II ger 6 poäng. Bonuspoäng från del I av inlämningsuppgifterna och från quizzarna adderas till erhållna poäng på del I. Bonuspoäng från del II av inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del II. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår.)

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I (1-5)	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II (6-8)	18	Avancerade problem	0	0	4	8	11	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden tilldelas inte full poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Bestäm alla reella tal h för vilka matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & h \\ h & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ h & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

har oändligt många lösningar.

(4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen, $\text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b}$, av $\mathbf{b}$ på kolonnrummet av A .

(4 p)

3. Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $D = P^{-1}AP$.

(1 poäng av 4 poäng ges för att visa att egenvärdena till A är -1 och 3 .) **(4 p)**

4. Låt $\Pi = [0, 1]^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ för alla } i = 1, 2, 3\}$ vara enhetskuben och låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Visa att avbildningen är bijektiv och beräkna volymen, $\text{vol}(T^{-1}(\Pi))$, av bilden av Π under den inversa avbildningen T^{-1} .

(4 p)

5. Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ vara baser för $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm basbytematriserna $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ och $\mathcal{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vara avbildningen som ges av

$$T \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{11} \\ a_{22} & a_{11} + a_{22} \end{bmatrix}.$$

(i) Visa att T är en linjär avbildning.

(2 p)

(ii) Bestäm en bas till bildrummet av T ,

$$\text{Im } T = \{T(A) : A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\},$$

och en bas till nollrummet av T ,

$$\text{Nul } T = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : T(A) = 0\}.$$

(4 p)

7. Låt $\mathbf{v}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är skild från nollvektorn. Låt $T_{\mathbf{v}}$ vara den linjära avbildning som ges av

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{x} \end{aligned}$$

(i) Bestäm om $T_{\mathbf{v}}$ är injektiv.

(2 p)

(ii) Låt $\mathbf{w}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot $\mathbf{v}$ och skild från nollvektorn. Låt $\mathcal{B}$ vara den ortogonala basen som ges av $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\}$. Bestäm matrisrepresentationen, $[T_{\mathbf{v}}]_{\mathcal{B}}$, av $T_{\mathbf{v}}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

(4 p)

8. Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en inre produkt på $\mathbb{R}^n$.

(i) Visa att det finns en symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ som har bara positiva egenvärden sådan att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$$

för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

(3 p)

(ii) Visa att det finns en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sådan att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y})$$

för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, där $\cdot$ betecknar den vanliga inre produkten på $\mathbb{R}^n$.

(3 p)
