

OMTENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 Vektoranalys, HT2023

Torsdagen den 20 december 2023, kl 8.00 – 13.00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut (ingen räknedosa).

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från HT2023 adderas till tentauppgift 1, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan.

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng.

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (i) (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ii) (ρ, φ, z) är cylinderkoordinater så att $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$. (iii) (r, θ, φ) är sfäriska koordinater så att $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$. (iv) $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ är Laplace operatoren. (v) t är tiden, och $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

1. (a) Härled den allmänna sfäriskt symmetriska lösningen till Laplaces ekvation $\Delta\Phi = 0$, dvs., Φ skall bara bero på $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$. (3p)
(b) Den stationära temperaturfördelningen $T(r)$ inom området $R < r < 2R$ uppfyller Laplaces ekvation med randvillkoren

$$T(R) = T_0, \quad \left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r=2R} = -\frac{T_0}{R}$$

där $T_0 > 0$ och $R > 0$ är konstanter. Beräkna temperaturfördelningen $T(r)$ inom området $R < r < 2R$! (3p)

2. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater och med sfäriska basvektorer genom

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{a \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{b \sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta$$

där a och b är konstanter.

- (a) Beräkna $\text{div } \mathbf{F}$. (2p)
(b) Beräkna $\text{rot } \mathbf{F}$. (2p)
(c) Bestäm det förhållande mellan konstanterna a och b , som gör att vektorfältet blir virvelfritt (konservativt). Bestäm sedan en skalärpotential Φ till detta virvelfria vektorfält. (2p)
3. Betrakta vektorfältet $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}f(r)$, där r är beloppet av Ortsvektorn $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$ är en konstant vektor, och $f(r)$ en funktion av r .
- (a) Beräkna $\nabla \times \mathbf{A}$. (3p)
(b) Bestäm alla reellvärda funktioner $f(r)$ så att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. (3p)

4. Beräkna integralen

$$\oint_S d\mathbf{S} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$$

där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor, $\mathbf{r}$ är Ortsvektorn, och S är en sluten yta som omslutar volymen V . (6p) **Ledning:** Integralen kan beräknas med hjälp av en integralsats.

5. Masstätheten $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ och hastighetsfältet $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ hos en vätska uppfyller Euler:s ekvation

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p$$

där $p = p(\mathbf{r}, t)$ är tryckfältet, tillsammans med kontinuitetsekvationen

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

(a) Ange en fysikalisk tolkning av kontinuitetsekvationen! (2p)

(b) Visa att Euler:s ekvation kan skrivas som

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u}^2/2) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla p$$

där $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. (2p)

(c) Visa att $\mathbf{P} = \rho \mathbf{u}$ uppfyller

$$\partial_t P_i + \partial_j T_{ij} = 0$$

i indexnotation, där T_{ij} skall bestämmas. *Ledning:* P_i är komponenten av $\mathbf{P}$ i ett kartesiskt koordinatsystem K , och T_{ij} är komponenterna av en tensor av rang 2 i K . (2p)

6. Enligt Newton:s gravitationsteori kan gravitationsfältet $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ som genereras av en masstäthet $\rho_{mass} = \rho_{mass}(\mathbf{r})$ beräknas genom ekvationerna

$$\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{g} = -4\pi G_N \rho_{mass}$$

där $G_N = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ är Newton:s gravitationskonstant.

(a) Visa att det finns en gravitationspotential Φ så att $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$. (2p)

(b) Beräkna gravitationsfältet $\mathbf{g}$ som genereras av cylindersymmetriska masstätheten

$$\rho_{mass}(\mathbf{r}) = \begin{cases} C & \text{om } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{om } x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

där $C > 0$, $R > 0$ är konstanter. (4p) *Ledning:* Använd cylinderkoordinater.

LYCKA TILL!

Lösningsföreläsning tentamen SI1146, 20 december 2023

NOTE: I typed this in quickly and did not check: this will probably be corrected!!!!

This is a suggested solution of an exam and not pedagogical material: I skip some details and only write $(\dots)$; if you don't understand $(\dots)$, look at the course book for explanations.

1. (a) Om $\Phi = \Phi(r)$ och $r > 0$:

$$(\Delta\Phi)(r) = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r \Phi(r)) = 0 \Leftrightarrow \partial_r(r^2 \partial_r \Phi(r)) = 0 \Leftrightarrow r^2 \partial_r \Phi(r) = c_1$$

$$\Leftrightarrow \partial_r \Phi(r) = \frac{c_1}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{\Phi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2}$$

med godtyckliga integrationskonstanter c_1, c_2 .

- (b) Enligt (a) har Laplaces ekvation $\Delta T(r) = 0$ den allmänna lösningen

$$T(r) = C_1 + C_2/r$$

med godtyckliga konstanter C_1, C_2 . Randvillkoren ger

$$T(R) = C_1 + C_2/R = T_0, \quad T'(2R) = -C_2/(2R)^2 = -T_0/R \Rightarrow C_2 = 4RT_0,$$

$$C_1 = T_0 - C_2/R = T_0 - 4T_0 = -3T_0.$$

Svar: $\boxed{T(r) = T_0(-3 + 4R/r)}$.

2. (a)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\partial_r(a \sin(\theta) \cos(\theta)/r) + \partial_\theta(b \sin^2(\theta)/r^2)) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} (-a \sin(\theta) \cos(\theta)/r^2 + 2b \sin(\theta) \cos(\theta)/r^2) = \frac{\cos \theta}{r^4} (-a + 2b). \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ a \cos(\theta)/r^3 & b \sin(\theta)/r^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi (-2b \sin(\theta)/r^3 + a \sin(\theta)/r^3) = \frac{\sin \theta}{r^4} \mathbf{e}_\varphi (-2b + a). \end{aligned}$$

- (c) $\mathbf{F} = -\nabla \Phi$ om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ dvs., $a = 2b$ enligt (b).

$$\frac{2b \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{b \sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta = -\nabla \Phi = -\mathbf{e}_r \partial_r \Phi - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta \Phi = -\mathbf{e}_r \partial_r \frac{b \cos \theta}{r^2} - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta \frac{b \cos \theta}{r^2}$$

ger $\Phi = b \cos(\theta)/r^2$.

3. (a)

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{A}]_i &= \epsilon_{ijk} \underbrace{\partial_j a_l x_l x_k f(r)} \\ &= \epsilon_{ijk} (a_l \delta_{jl} x_k f(r) + a_l x_l \delta_{jk} f(r) + a_l x_l x_k f'(r) x_j / r) = \epsilon_{ijk} a_j x_k f(r) = [\mathbf{a} \times \mathbf{r} f(r)]_i \\ \text{ger } \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{a} \times \mathbf{r} f(r). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \partial_i a_j x_j x_i f(r) \\ &= a_j \delta_{ij} x_i f(r) + a_j x_j \delta_{ii} f(r) + a_j x_j x_i f'(r) x_i / r = a_i x_i f(r) + 3a_i x_i f(r) + a_j x_j r f'(r) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(4f(r) + r f'(r)) = 0 \end{aligned}$$

ger $r f'(r) + 4f(r) = 0$, som har den allmänna lösningen $f(r) = c/r^4$ där c är en godtycklig konstant.

4.

$$\begin{aligned} \left[\oint_S d\mathbf{S} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \right]_i &= \left[\oint_S \mathbf{a} (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}) \right]_i = \oint (a_i x_j - a_j x_i) dS_j \\ \int_V \partial_j (a_i x_j - a_j x_i) dV &= \int_V (a_i \delta_{jj} - a_j \delta_{ji}) dV = 2a_i |V| \end{aligned}$$

där $|V| = \int_V dV$. Svar: $2\mathbf{a}|V|$.

5. (a) Med Gauss sats ger kontinuitetsekvationen

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S},$$

dvs, tidsändring av vätskans massa inom ett godtycklig volymen V är lika med flödet av $\rho \mathbf{u}$ in i volymen V . Vi kan alltså tolka $\rho \mathbf{u}$ som massströmtäthet.

(b) Resultatet är sant om och bara om

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(\mathbf{u}^2/2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}).$$

Vi visar detta med indexnotation:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla(\mathbf{u}^2/2) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]_i &= u_j \partial_j u_i - \partial_i (u_j u_j / 2) + \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m \\ &= u_j \partial_j u_i - u_j \partial_i u_j + \underbrace{(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \partial_l u_m}_{u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i} = 0, \end{aligned}$$

som visar resultatet.

(c)

$$\begin{aligned} \partial_t P_i &= \partial_t (\rho u_i) = \underbrace{(\partial_t \rho)}_{-\partial_j (\rho u_j)} u_i + \underbrace{\rho \partial_t u_i}_{-\rho u_j \partial_j u_i - \partial_i p} \\ &= -u_i \partial_j (\rho u_j) - \rho u_j \partial_j u_i - \partial_j \delta_{ij} p = -\partial_j (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}), \end{aligned}$$

som visar resultatet med $T_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij}$.

6. (a) Om $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{0}$ så finns där en potential Φ så att $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$ (pga. $\nabla \times \nabla\Phi = \mathbf{0}$).
 (b) Potentialen uppfyller

$$\Delta\Phi = 4\pi G_N \rho_{mass} = \begin{cases} c & \text{om } \rho \leq R \\ 0 & \text{om } \rho > R \end{cases}$$

i cylinderkoordinater så att $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ där $c = 4\pi G_N C$. Ansatsen $\Phi = f(\rho)$ ger

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho}f'(\rho) = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho f(\rho)) = \begin{cases} c & \text{om } \rho \leq R \\ 0 & \text{om } \rho > R \end{cases},$$

som ger

$$\partial_\rho(\rho\partial_\rho f(\rho)) = \begin{cases} c\rho & \text{om } \rho \leq R \\ 0 & \text{om } \rho > R \end{cases}$$

och

$$\mathbf{g} = -\mathbf{e}_\rho \partial_\rho f(\rho).$$

Detta ger

$$\partial_\rho f(r) = \begin{cases} c\rho^2/2 + c_1 & \text{om } \rho \leq R \\ c_2 & \text{om } \rho > R \end{cases} \Rightarrow \partial_\rho f(r) = \begin{cases} c\rho/2 + c_1/\rho & \text{om } \rho \leq R \\ c_2/\rho & \text{om } \rho > R \end{cases}.$$

$|\partial_\rho f| < 0$ i $\rho = 0$ ger $c_1 = 0$; $\partial_\rho f$ skall vara kontinuerligt i $\rho = R \Rightarrow c_2 = cR^2/2$. Alltså,

$$\partial_\rho f(r) = \begin{cases} c\rho/2 & \text{om } \rho \leq R \\ cR^2/2\rho & \text{om } \rho > R \end{cases}.$$

Svar:

$$\mathbf{g} = \begin{cases} -2\pi G_N C \mathbf{e}_\rho \rho & \text{om } \rho \leq R \\ -2\pi G_N C R^2 \mathbf{e}_\rho / \rho & \text{om } \rho > R \end{cases}.$$