

KTH Fysik

Tentamen i **Fysikens matematiska metoder**

SI1200; SI1140 Del 2; SI1143

Fredagen den 14 mars 2025 kl 8:00 – 13:00

Anteckna på varje blad: namn, personnummer, och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: bara formelsamlingen som delas ut

Obs! Miniräknare ej tillåten.

Notera gärna dina **bonuspoäng** på din tentamens första sida.

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan (Canvas)

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Inför och förklara konstanter och symboler du behöver!

Notation: $u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$; $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$; $x \in \mathbb{R}$ betyder $-\infty < x < \infty$

OBS: Om inget annat skrivs så kan man få full poäng även om man inte beräknar alla integraler.

1. ¹ Beräkna funktionen $u(r, t)$, $0 \leq r \leq R$ och $t \geq 0$, som uppfyller följande villkor,

$$u_t(r, t) - a \left[u_{rr}(r, t) + \frac{2}{r} u_r(r, t) \right] = K \quad (0 < r < R, t > 0),$$
$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0 \quad (t > 0),$$
$$u(r, 0) = 0 \quad (0 < r < R);$$

$R > 0$, $a > 0$ och $K > 0$ är konstanter. *Ledning:* (i) $u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r} \partial_r^2(ru)$,
(ii) $\int \sin(kx) x dx = [\sin(kx) - kx \cos(kx)]/k^2$. (6p)

2. Luftsvängningar i en orgelpipa av längd L kan modelleras med lufttrycket $p(x, t)$ vid positionen x , $0 \leq x \leq L$, och tiden $t \geq 0$: funktionen $u(x, t) = p(x, t) - p_0$ (där p_0 är konstant) uppfyller

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = K,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

där $K > 0$ och $c > 0$ är konstanter. Bestäm $u(x, t)$! Integraler skall beräknas för full poäng. *Ledning:* Bestäm en partikulärlösning $U(x)$ till partiella differentialekvationen och randvillkoren. Följande integral kan vara användbar: $\int x^2 \cos(kx) dx = ((kx)^2 - 2) \sin(kx)/k^3 + 2x \cos(kx)/k^2$. (6p)

3. Bakteriedensiteten $u(x, t)$ (i kg/m) i ett mycket långt tunt rör uppfyller differentialekvationen

$$u_t(x, t) - D u_{xx}(x, t) = \alpha u(x, t)$$

där $\alpha > 0$ och $D > 0$ är konstanter, t är tiden, och x är en kartesisk koordinat längs röret. Anta att det finns en bakteriemängd N_0 (i kg) koncentrerad i mitten av röret vid tiden $t = 0$. Bestäm bakteriekoncentrationen $u(x, t)$ för tider $t > 0$! Alla integraler skall beräknas för full poäng. (6p) (v.g.v.)

¹Dina bonuspoäng från hemtalen under VT2025 adderas till dina poäng på uppgift 1, dock kan du maximalt få 6 poäng från uppgift 1 och hemtalen tillsammans.

4. En lång cirkulär cylinder med radie R befinner sig i temperaturjämvikt med omgivningen, som har temperaturen T_0 (konstant) innan tiden $t = 0$. Vid tiden $t = 0$ ändras omgivningens temperatur till T_1 (konstant), och den förblir T_1 för alla tider $t > 0$. Bestäm temperaturen i cylindern som funktion av positionen och tiden. Cylinderns randtemperatur är lika med omgivningens temperatur hela tiden.

Ledning: Ställ upp modellen och lös den. Anta att cylinderns temperatur $T = T(r, t)$ bara beror på avståndet r från cylinderns symmetriaxel och tiden t . (6p)

5. Funktionen $u(x, y)$, $0 \leq x < \infty$ och $-\infty < y \leq 0$, uppfyller differentialekvationen

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

i hela området, tillsammans med villkoren

$$u(x, 0) = u_0 \delta(x - a) \quad (0 < x < \infty), \quad u_x(0, y) = 0 \quad (-\infty < y < 0),$$

där $a > 0$ och $u_0 > 0$ är konstanter.

Ange definitionen av Greensfunktionen till problemet, och beräkna Greensfunktionen! (6p)

6. Alice befinner sig i punkten $(x, y) = (a, a)$ i en skog ($a > 0$), och hon vill så snabbt som möjligt komma till en godtycklig punkt på den positiva y -axeln, $x = 0$ och $y \geq 0$. Skogstätheten är så att Alice hastighet kan beskrivas med funktionen

$$v(x, y) = v_0 \frac{x^2 + y^2}{2a^2},$$

där $v_0 > 0$ är en konstant. Vilken väg skall Alice välja? *Ledning:* (i) Parametrisera vägen som $r(\varphi)$, där r och φ är polära koordinater så att den positiva y -axeln motsvara linjen $r \geq 0$, $\varphi = \pi/2$. (ii) $v = \frac{ds}{dt}$ där $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$ där $\sin(\arcsin(x)) = x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$). (iv) $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Anmärkning: Du kan få delpoäng genom att bara skriva ner vilken typ av funktional och vilken typ av Euler-Lagrange ekvation som kan lösa problemet.

LYCKA TILL!

Lösningsföreslag till tentamen i Fysikens matematiska metoder 250314
 I TYPED THIS QUICKLY: PLEASE LET ME KNOW BY EMAIL IF YOU FIND
 ANY MISTAKES/TYPOS. THANKS.

1. (Uppgiften är en del av uppgift 1 i hemtal 3, vt2025).

Ansätzen

$$u(r, t) = \sum_n f_n(r) g_n(t)$$

ger följande problem som bestämmer funktionerna $f_n(r)$:

$$-f''(r) - \frac{2}{r}f(r) = -\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rf(r)) = \lambda f(r), \quad |f(0)| < \infty, f(R) = 0.$$

Detta ger

$$f_n(r) = \frac{1}{r} \sin(k_n r), \quad \lambda_n = k_n^2, \quad k_n = \frac{n\pi}{R} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Funktionerna $g_n(r)$ uppfyller

$$g'_n(t) + ak_n^2 g_n(t) = K_n, \quad g_n(0) = 0$$

där

$$K_n = \frac{\int_0^R dr r^2 f_n(r) K}{\int_0^R dr r^2 f_n(r)^2} = \frac{2K}{R} \int_0^R dr r \sin(k_n r) = -\frac{2K}{R} \frac{R}{k_n} \cos(k_n R) = \frac{2K(-1)^{n-1}}{k_n},$$

som har lösningen

$$g_n(t) = \frac{K_n}{ak_n^2} (1 - e^{-ak_n^2 t}) = \frac{2K(-1)^{n-1}}{ak_n^3} (1 - e^{-ak_n^2 t}).$$

Svar:

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K(-1)^{n-1}}{ak_n^3} (1 - e^{-ak_n^2 t}) \frac{\sin(k_n r)}{r}, \quad k_n = n \frac{\pi}{R}.$$

Alternativlösning. PDE och RV har en partikulärlösning $U(r)$:

$$-a(\Delta U)(r) = -a(U''(r) + \frac{2}{r}U'(r)) = K, \quad |U(0)| < \infty, \quad U(R) = T_0,$$

har lösningen

$$U(r) = T_0 + \frac{K}{6a}(R^2 - r^2).$$

Ansatsen $u(r, t) = U(r) + v(r, t)$ ger

$$\begin{aligned} v_t(r, t) - a(\Delta v)(r, t) &= 0 \quad (0 < r < R, t > 0), \\ v(R, t) &= 0 \quad (t > 0), \\ v(r, 0) &= v_0(r) := -\frac{K}{6a}(R^2 - r^2) \quad (0 < r < R), \end{aligned} \tag{1}$$

som har lösningen

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin(k_n r)}{r} e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = n \frac{\pi}{R}$$

där (integralen behövs inte för full poäng)

$$C_n = \frac{2}{R} \int_0^R dr r \sin(k_n r) v_0(r) = -\frac{2K(-1)^{n-1}}{ak_n^3}.$$

Detta ger

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \frac{K}{6a}(R^2 - r^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K(-1)^{n-1}}{ak_n^3} e^{-ak_n^2 t} \frac{\sin(k_n r)}{r}, \quad k_n = n \frac{\pi}{R}. \quad (2)$$

2. ODE och RV har en partikulärlösning $u_{part}(x, t) = U(x)$ där

$$-c^2 U''(x) = K, \quad U'(0) = 0, \quad U(L) = 0 \Rightarrow U(x) = \frac{K}{2c^2}(L^2 - x^2).$$

Ansatsen

$$u(x, t) = U(x) + v(x, t)$$

ger problemet

$$\begin{cases} v_{tt}(x, t) - c^2 v_{xx}(x, t) = 0, & 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\ v_x(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \\ v(x, 0) = -U(x), \quad v_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

som kan lösas med ansatsen

$$v(x, t) = \sum_n a_n(t) f_n(x),$$

där

$$-f''(x) = \lambda f(x), \quad f'(0) = f(L) = 0,$$

vilket ger

$$f_n(x) = \cos(k_n x), \quad k_n = (n - 1/2) \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Detta ger ODE-problemet

$$\ddot{a}_n(t) + (ck_n)^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = -\frac{2}{L} \int_0^L \overline{f_n(x)} U(x) dx, \quad a'_n(0) = 0,$$

som har lösningen

$$a_n(x) = a_n(0) \cos(ck_n t).$$

Svar:

$$u(x) = \frac{K}{2c^2}(L^2 - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \cos(k_n x) \cos(ck_n t), \quad k_n = (n - 1/2) \frac{\pi}{L}$$

där

$$\begin{aligned} a_n(0) &= -\frac{K}{Lc^2} \int_0^L \cos(k_n x)(L^2 - x^2) dx \\ &= -\frac{2K}{Lc^2} \frac{\sin((n - 1/2)\pi)}{k_n^3} = (-1)^n \frac{2K}{c^2 L k_n^3}. \end{aligned}$$

Alternativlösning (kortfattad): Ansatsen

$$u(x, t) = \sum_n f_n(x) g_n(t)$$

ger egenfunctioner $f_n(x)$ som ovan och

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) [\ddot{g}_n(t) + c^2 k_n^2 g_n(t)] = K = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) b_n$$

där

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_n(x) K dx = \frac{2K}{L} \int_0^L \cos(k_n x) dx = \frac{2K}{k_n L} \sin(k_n L) = (-1)^{n+1} \frac{2K}{k_n L}.$$

Det ger ODE problemen

$$\ddot{g}_n(t) + c^2 k_n^2 g_n(t) = b_n, \quad g_n(0) = \dot{g}_n(0) = 0,$$

med lösningar

$$g_n(t) = \frac{b_n}{k_n^2 c^2} (1 - \cos(k_n c t)).$$

Svar:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2K}{k_n^3 c^2 L} (1 - \cos(k_n c t)) \cos(k_n x), \quad k_n = (n - 1/2) \frac{\pi}{L}.$$

3. BV lyder

$$u(x, 0) = N_0 \delta(x).$$

PDE med Fouriertransformen

$$\hat{u}(k, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-ikx} dx$$

ger

$$\hat{u}_t(k, t) + Dk^2 \hat{u}(k, t) = \alpha \hat{u}(k, t),$$

som har lösningen

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{-(Dk^2 - \alpha)t}.$$

BV ger

$$\hat{u}(k, 0) = N_0.$$

Inversa Fouriertransformen ger lösningen:

$$u(x, t) = e^{\alpha t} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} N_0 e^{-Dk^2 t} e^{ikx}.$$

Integralen ovan beräknades under kursens gång (och finns med i formelsamlingen).

Svar:

$$u(x, t) = N_0 e^{\alpha t} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

4. Låt $T(r, t)$ vara temperaturen i cylindern vid $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ och tiden $t \geq 0$ (problemet är symmetriskt med avseende på rotationer kring z -axeln (som är identisk med symmetriaxeln) och translationer i z -riktningen: $\Rightarrow T = T(r, t)$).

PDE-problemet är

$$\begin{cases} T_t(r, t) - a(\Delta T)(r, t) = 0 & (0 < r \leq R, t > 0), \\ T(R, t) = T_1, \quad |T(0, t)| < \infty & (t > 0) \\ T(r, 0) = T_0 & (0 < r < R), \end{cases}$$

där $(\Delta T)(r, t) = T_{rr}(r, t) + (1/r)T_r(r, t)$.

Vi vill bli av med inhomogeniteten i randvillkoret (för att kunna använda Fourier:s method). Ansatsen för partikulärlösning $T(r, t) = T_1 + u(r, t)$ ger

$$\begin{cases} u_t(r, t) - a(\Delta u)(r, t) = 0 & (0 < r \leq R, t > 0), \\ u(R, t) = 0, \quad |u(r, t)| < \infty & (t > 0), \\ u(r, 0) = T_0 - T_1 & (0 < r < R), \end{cases}$$

som har lösningen (jag ger inga detaljer därför att det är ett standardproblem i kursen)

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(k_n r) e^{-ak_n^2 t}, \quad a_n = \frac{\int_0^R J_0(k_n r)(T_0 - T_1) r dr}{\int_0^R J_0(k_n r)^2 r dr}$$

där $k_n = \alpha_{0,n}/R$ och $\alpha_{0,n}$ är nollställena till J_0 .

Svar:

$$T(r, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^R J_0(k_n s) s ds}{\int_0^R J_0(k_n s)^2 s ds} J_0(k_n r) e^{-ak_n^2 t} \quad (0 \leq r \leq R, t \geq 0)$$

där $k_n = \alpha_{0,n}/R$ och $\alpha_{0,n}$ är nollställena till J_0 .

Anmärkning: Integralerna kan beräknas, och det ger en mer explicit lösning:

$$T(r, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(k_n r)}{k_n R J_1(k_n R)} e^{-ak_n^2 t},$$

men det krävs inte för full poäng.

5. Greensfunktionen $G = G(x, y, x', y')$ är funktionen av $x \geq 0, x' \geq 0, y \leq 0, y' \leq 0$ som är lika med lösningen $u(x, y)$ till följande problem,

$$-G_{xx}(x, y, x', y') - G_{yy}(x, y, x', y') = \delta(x - x')\delta(y - y')$$

(det vore också OK utan minus tecknet, dvs, $G \rightarrow -G$) i hela området, tillsammans med villkoren

$$G(x, 0, x', y') = 0 \quad (0 < x < \infty), \quad G_x(0, y, x', y') = 0 \quad (-\infty < y < 0).$$

Det kan skrivas kortare som

$$-\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad G|_{y=0} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla G|_{x=0} = 0,$$

där $\mathbf{r} = (x, y)$ och $\mathbf{r}' = (x', y')$ är i området $D := \{\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\}$.

Om $\mathbf{r}' = (x', y') \in D$ är källpunkten med laddning $Q = 1$, so kan man lösa problem med spegling: vi behöver 3 spegelpunkter $\mathbf{r}'_1 = (-x', y')$, $\mathbf{r}'_2 = (x', -y')$, $\mathbf{r}'_3 = (-x', -y')$ med laddningar $Q_1 = 1$, $Q_2 = -1$, $Q_3 = -1$ (pga. regeln "udda spegling för Dirichlet RV och jämd spegling för Neumann RV).

Lösningen till $-\Delta G_0 = \delta^2(\mathbf{r})$ i $\mathbb{R}^2$ är fundamentallösningen

$$G_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{r}|/a) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}/a),$$

där $a > 0$ är en godtycklig konstant med dimension "längd".

Spegelmetoden ger

$$G = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1) - G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2) - G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3|} \right)$$

Svar (jag använder $\ln(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2} \ln(x)$ om $x > 0$ pga att jag tycker formeln ser snyggare ut så — smaksak; det finns flera sätt att skriva svaret)

$$G = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{[(x - x')^2 + (y - y')^2][(x + x')^2 + (y - y')^2]}{[(x - x')^2 + (y + y')^2][(x + x')^2 + (y + y')^2]},$$

där $x \geq 0$, $x' \geq 0$, $y \leq 0$, $y' \leq 0$.

[CHECK: $G|_{y=0} = 0$: OK.]

6. $v = \frac{ds}{dt}$ ger

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi}{v_0 r^2 / 2a^2} = \frac{2a^2}{v_0} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2}}{r^2} d\varphi.$$

Detta ger tiden T att förflyttar sig längs curvan $r(\varphi)$, $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$:

$$T = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2a^2}{v_0} \frac{\sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}}{r(\varphi)^2} d\varphi$$

där $r' = \frac{dr}{d\varphi}$. T är en funktional som kan skrivas som

$$T = \frac{2a^2}{v_0} \int_{\pi/4}^{\pi/2} L(r(\varphi), r'(\varphi)) d\varphi$$

där

$$L(r, r') = \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2}}{r^2}.$$

Funktionalen är stationär om Euler-Lagrange ekvationen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial r'} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

är uppfylld. Det skall lösas med villkoren

$$r(\pi/2) = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial r'} \right|_{\varphi=\pi/2} = 0.$$

Vi beräkna

$$\frac{\partial L}{\partial r'} = \frac{r'}{r^2 \sqrt{(r')^2 + r^2}},$$

alltså är villkoren

$$r(\pi/2) = \sqrt{2}a, \quad r'(\pi/2) = 0. \quad (3)$$

Euler-Lagrange ekvationen implicerar att

$$\begin{aligned} r' \frac{\partial L}{\partial r'} - L &= \frac{(r')^2 \sqrt{(r')^2 + r^2}}{r^2} - \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2}}{r^2} \\ &= \frac{1}{r^2 \sqrt{(r')^2 + r^2}} ((r')^2 - \sqrt{(r')^2 + r^2}) = -\frac{1}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} = C \end{aligned}$$

(C är en integrationskonstant). Detta ger

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{1}{C^2} - r^2},$$

som kan separeras,

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - r^2}} = \frac{d(Cr)}{\sqrt{1 - (Cr)^2}} = \pm d\varphi.$$

Integrationen av båda sidor ger den allmänna lösningen till Euler-Lagrange ekvationen,

$$\arcsin(Cr) = \pm(\varphi + c)$$

med c en ytterliga integrationskonstant; det är ekvivalent med

$$r(\varphi) = \pm \frac{1}{C} \sin(\varphi + c).$$

Villkoret

$$r'(\pi/2) = \pm \frac{1}{C} \cos(\pi/2 + c) = 0$$

ger $c = 0$. Villkoret

$$r(\pi/4) = \pm \frac{1}{C} \sin(\pi/4) = \pm \frac{1}{C} \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

ger $\pm C = 1/2a$.

Svar: Alice skall röra sig längs vägen

$$r(\varphi) = 2a \sin(\varphi)$$

från $\varphi = \pi/4$ till $\varphi = \pi/2$.

Anmärkning: Räkningen ovan visar att vägen ovan ger en extremal tid; det kunde vara en sadelpunkt eller maximum. Det är plausibelt att vägen ovan ger minimala tiden, men ett bevis kräver mer jobb (det krävs inte för full poäng, så klart): man kan börja med att jämför tiden för $r(\varphi)$ ovan med tiden längs raka vägen från (a, a) till $(0, a)$, osv.