

Frågor med förslag till lösningar. OBS: detta dokument innehåller ej fullständiga lösningar!

Uppgift 1

Fråga

1. En partikel med massan m befinner sig i en tvådimensionell potential $U(x, y)$ med följande egenskaper:

$$U(x, y) = 0 \quad \text{för } 0 < x < a \quad \text{och} \quad 0 < y < b$$

$$U(x, y) = \infty \quad \text{annars}$$

a) Visa att partikelns energi kan skrivas enligt

$$E = (\pi^2 \hbar^2 / 2m)(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2)$$

samt att vågfunktionen kan skrivas enligt

$$\Psi(x, y) = C \sin(n_1 \pi x/a) \sin(n_2 \pi y/b). \quad [4p]$$

b) Normera vågfunktionen, d v s bestäm konstanten C . [1p]

Lösning

(Se även Harris, new intern. ed. sidorna 237-241)

a) Vi ställer upp tidsberoende Schrödingerekvationen i två dimensioner ($U(x, y) = 0$ för $0 < x < a$ och $0 < y < b$)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y).$$

Variabelseparation ger:

$$\Psi(x, y) = \Psi(x)\Psi(y)$$

Divisionen $\Psi(x)\Psi(y)$ ger nu:

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) &= E_x \Psi(x) \\ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi(y) &= E_y \Psi(y) \end{aligned}$$

x delen:

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m E_x \Psi(x)}{\hbar^2} = 0$$

$$\Psi(x) = A e^{ik_x x} + B e^{-ik_x x} \quad \text{där} \quad k_x^2 = 2m E_x / \hbar^2.$$

Vi har randvillkoren: $\Psi(0) = 0$ och $\Psi(a) = 0$.

$$\begin{aligned}\Psi(0) = 0 &\Rightarrow A = -B \\ Ae^{ik_x a} + Be^{-ik_x a} = 0 &\Rightarrow A(e^{ik_x a} - e^{-ik_x a}) = 0 \\ \sin k_x a = 0 &\Rightarrow k_x a = n_x \pi \\ \Psi(x) &= K \sin(n_x \pi x / a) \\ E_x = \frac{k_x^2 \hbar^2}{2m} &= \frac{n_x^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}\end{aligned}$$

Vi behandlar y-delen på samma sätt som x:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} + \frac{2m E_y \Psi(y)}{\hbar^2} &= 0 \\ \Psi(y) &= L \sin(n_y \pi y / b) \\ E_y = \frac{k_y^2 \hbar^2}{2m} &= \frac{n_y^2 \hbar^2 \pi^2}{2mb^2} \\ \Rightarrow \Psi(x, y) = \Psi(x) \Psi(y) &= C \sin(n_x \pi x / a) \sin(n_y \pi y / b)\end{aligned}$$

Sätt $\Psi(x, y)$ i Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y).$$

Lösningen ger:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (n_x^2 / a^2 + n_y^2 / b^2).$$

b) Normeringskravet:

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^b C^2 \sin^2(n_x \pi x / a) \sin^2(n_y \pi y / b) dy dx &= 1 \\ C^2 \int_0^a \sin^2(n_x \pi x / a) dx \int_0^b \sin^2(n_y \pi y / b) dy &= 1\end{aligned}$$

Från [Beta]

$$C^2 ab / 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{4 / ab}$$

Uppgift 2

Fråga

Den tvåatomiga molekylen HX (X är okänd) har en effektiv fjäderkonstant på $9.68 \times 10^5 \text{ g/s}^2$ och ett jämviktsavstånd på 0.092 nm. Våglängden av en foton som HX kan absorbera genom en vibrationsövergång ($\Delta V = 1$) är $2.4 \mu\text{m}$, där V är vibrationskvanttalet.

a) Beräkna reducerade massan för HX . [2p] b) Vilken atom är X ? [1p] c) Beräkna energierna för de lägsta rotations- och vibrationsstillstånden för HX . [2p]

Lösning

(a)

Enligt formelsamlingen:

$$E_{\text{vib}} = \left(V + \frac{1}{2}\right) h \nu_0, \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

där μ är den reducerade massan som sökes.

Vid en vibrationsövergång ($\Delta V = 1$) är fotonenergin:

$$E_\gamma = E_{\text{vib}, \Delta V=1} = E_{\text{vib}, V_1} - E_{\text{vib}, V_0} = h\nu_0 = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

vilket ger:

$$\mu = \frac{k\hbar^2}{E_\gamma^2} = 1.57 \times 10^{-27} \text{ kg} = 0.946 \text{ u}.$$

(b) Enligt formelsamlingen:

$$\mu = \frac{m_H m_X}{m_H + m_X},$$

vilket ger m_X .

$$m_X = \frac{m_H \mu}{m_H - \mu} = 2.57 \times 10^{-26} \text{ kg} = 15.5 \text{ u}.$$

Elementet X är syre.

(c) Enligt formelsamlingen:

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} J(J+1).$$

Det lägsta rotationstillståndet har $J = 0$ vilket ger $E_{\text{rot}, 0} = 0 \text{ eV}$. Det lägsta vibrationsstillståndet har $V = 0$ vilket ger $E_{\text{vib}, 0} = 0.258 \text{ eV}$.

Uppgift 3

Fråga

En väteatom befinner sig i ett tillstånd med $n = 2, l = 1$ och $m_l = 0$. a) Beräkna elektronens mest sannolika radie, r_0 uttryckt i a_0 . [2.5p] b) Beräkna det/de värden på vinkeln θ där vi har störst sannolikhet att hitta elektronen. [2.5p]

Lösning

Vi har tillståndet $(n, l, m_l) = (2, 1, 0)$ och ser från formelsamlingen att den totala vågfunktionen är:

$$\Psi_{2,1,0} = R_{2,1} Y_1^0 = \frac{r e^{-r/2a_0}}{(2a_0)^{3/2} \sqrt{3} a_0} \sqrt{3/4\pi} \cos\theta$$

a) Elektronens radie beror endast på den radiella vågfunktionen R . Den radiella sannolikhetsfunktionen, $P(r)$, kan skrivas som:

$$P(r) = r^2 |R_{2,1}|^2 = r^2 \frac{r^2 e^{-r/a_0}}{3(2a_0)^3 a_0^2}$$

Maximum av $P(r)$ får genom derivering:

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= 0. \\ \frac{dP(r)}{dr} &= A \left(4r^3 e^{-r/a_0} - \frac{r^4 e^{-r/a_0}}{a_0} \right) = A e^{-r/a_0} (4r^3 - r^4) \end{aligned}$$

där $A = 1/(24a_0^5)$.

$$(4r^3 - r^4/a_0) = 0 \Rightarrow 4 - r/a_0 = 0 \Rightarrow r = 4a_0$$

b) Vi har tillståndet $(n, l, m_l) = (2, 1, 0)$ och ser från formelsamlingen att vågfunktionens θ -beroende del, samt den tillhörande θ -beroende sannolikhetstätheten skrivas på följande sätt:

$$\begin{aligned} Y_l^{m_l} &= Y_1^0 = \sqrt{3/4\pi} \cos\theta \\ p(\theta) &= |Y_1^0|^2 = 3/4\pi \cos^2\theta \end{aligned}$$

Om man vill veta i vilken riktning $(\theta, d\theta)$ som det är störst sannolikhet att hitta elektronen så bör man skriva $P(\theta) = p(\theta)dV$ och sedan integrera över alla r med volymelementet $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$. Detta ger $P(\theta)$ formen $\cos^2\theta \sin\theta$. Om vi deriverar denna funktion och letar 0-ställen

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos^2\theta \sin\theta)}{d\theta} &= -2\cos\theta \sin^2\theta + \cos^3\theta = 0, \\ \cos\theta(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) &= 0 \\ \Rightarrow 3\cos^2\theta &= 2 \end{aligned}$$

finner vi $\theta = 35^\circ$ och $\theta = 145^\circ$.

Man kan även hitta sannolikhetstäthetens maximum genom att derivera $p(\theta)$ och hitta dess nollställen enligt följande:

$$\frac{d(\cos^2\theta)}{d\theta} = -2\cos\theta \sin\theta = 0.$$

$$\Rightarrow \theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2.$$

Observera dock att detta inte var det som efterfrågades i denna uppgift.

Från andra derivaten

$$\frac{d^2(\cos^2\theta)}{d\theta^2} = 2(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

finner vi maximum för: $\theta = 0, \pi$ och minimum för $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ Således har sannolikhetstätheten i θ -led sitt maximum i riktningarna $\theta = 0, \pi$. (Se även Harris, new intern. ed. sidorna 260-261, fig. 13.)

Uppgift 4

Fråga

En stav med längden L_0 rör sig med hastigheten v längs den horisontella axeln, x' . Staven är orienterad så att den har en vinkel θ_0 relativt x' -axeln. a) Bestäm stavens längd uppmätt av en stationär observatör. [2.5p] b) Bestäm vinkeln som staven har relativt stationära observatörens horisontella axel, x . [2.5p]

Lösning

Vi kallar stavens inertialsystem för S' och observatören har inertialsystem S . Den relativa hastigheten mellan S och S' är v .

a)

$$L' = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2} = L_0$$

$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\Delta x'^2 = L_0^2 \cos^2 \theta_0 \quad \text{och} \quad \Delta y'^2 = L_0^2 \sin^2 \theta_0$$

$$\Delta x'^2 = \gamma^2 \Delta x^2 \quad (\text{längdkontraktion})$$

$$\Delta y'^2 = \Delta y^2$$

$$L = \sqrt{(\Delta x'/\gamma)^2 + \Delta y'^2} = L_0 \sqrt{(\cos \theta_0 / \gamma)^2 + \sin^2 \theta_0}$$

$$L = \sqrt{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta_0)} \quad \text{där} \quad \beta = v/c$$

b)

$$\Delta x = L \cos \theta \quad \text{och} \quad \Delta y = L \sin \theta = \Delta y'$$

$$\Delta x' = L_0 \cos \theta_0 \quad \text{och} \quad \Delta y' = L_0 \sin \theta_0$$

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x' / \gamma} = \gamma \tan \theta_0$$

Uppgift 5

Fråga

Atomkärnan ${}^{212}_{83}\text{Bi}$ kan sönderfalla på två olika sätt: α - sönderfall och β^- -sönderfall. a) Beskriv schematiskt vad som händer vid sönderfallet, d v s vilka partiklar som sänds ut från atomkärnan i de två fallen samt visa vilka dotterkärnor som skapas. [2.5p] b) Utgå från atomära massor och beräkna Q -värdet för de två sönderfallen. [2.5p]

Lösning

$$(a) \quad \alpha: \quad {}^{212}_{83}\text{Bi} \Rightarrow {}^{208}_{81}\text{Tl} + {}^4_2\text{He} \quad \beta^-: \quad {}^{212}_{83}\text{Bi} \Rightarrow {}^{212}_{84}\text{Po} + e^- + \bar{\nu}_e$$

(b)

$$Q = (m_{\text{före}} - m_{\text{efter}})c^2 \quad \text{där } m \text{ är kärnmassan.}$$

$$Q_{\beta^-} = (m_{\text{Bi}} - m_{\text{Po}} - m_e)c^2, \quad m_{\bar{\nu}_e} \approx 0.$$

Atommassan $M = m + Zm_e$.

$$Q_{\beta^-} = (M_{\text{Bi}} - 83m_e - M_{\text{Po}} + 84m_e - m_e)c^2$$

Elektronernas massor försvinner vid subtraktionen så vi kan använda atomära massor. Med hjälp av tabellen för atomära massor får vi:

$$Q_{\beta^-} = (M_{\text{Bi}} - M_{\text{Po}})c^2 = (211.9913 - 211.9888)c^2 = 0.0025uc^2$$

$$Q_{\beta^-} = 0.0025uc^2 \times 931.502\text{MeV}/c^2 = 2.3\text{MeV}$$

$$Q_{\alpha} = (m_{\text{Bi}} - m_{\text{Tl}} - m_{\text{He}})c^2$$

$$Q_{\alpha} = (M_{\text{Bi}} - 83m_e - M_{\text{Tl}} + 81m_e - M_{\text{He}} + 2m_e)c^2$$

$$Q_{\alpha} = (M_{\text{Bi}} - M_{\text{Tl}} - M_{\text{He}})c^2 = (211.9913 - 207.9820 - 4.0015)uc^2 = 0.0078uc^2 = 7.3\text{MeV}$$

$Q_{\beta^-} > 0 \Rightarrow \beta^-$ sönderfall är energetiskt möjligt.

$Q_{\alpha} > 0 \Rightarrow \alpha$ sönderfall är energetiskt möjligt.

Uppgift 6

Fråga

Naturligt samarium innehåller 15% av den radioaktiva isotopen ${}^{147}\text{Sm}$, som sönderfaller genom att avge en α -partikel. Ett gram (1 g) naturligt samarium sänder ut 89 α -partiklar

per sekund. Bestäm ^{147}Sm isotopens halveringstid med hjälp av den givna informationen. [5p]

$$N = \frac{0.15 \times 10^{-3} \text{ kg}}{146.915 \text{ u/atom} \cdot 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg/u}} = 6.15 \times 10^{20} \text{ atomer}$$

Aktiviteten:

$$\begin{aligned} A = 89 \text{ Bq} &= \lambda \cdot N \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.45 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1} \\ \lambda &= \ln 2 / t_{1/2} \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = 15 \times 10^{10} \text{ år.} \end{aligned}$$

Uppgift 7

Fråga

Kim har hittat en synbart ogenomskinlig halvledare och vill ta reda på vad det är för någon. För att avgöra saken mäter hen upp dess ledningsförmåga. När Kim värmer halvledaren 9 grader C från rumstemperatur så fördubblas ledningsförmågan jämfört med vid rumstemperatur. Kim antar att populationen av ledningselektroner är avgörande. a) Vilken eller vilka av de nedanstående kan hen avföra på en gång? [1.5p] b) Visa med hjälp av beräkningar vilken av följande halvledare Kim har hittat. [3.5p]

Halvledare	Bandgap (E_g)
Ge	0.68 eV
Si	1.18 eV
GaAs	1.43 eV
CdSe	1.73 eV
ZnTe	2.25 eV
GaN	3.4 eV
diamant	5.5 eV

Fermi-Dirac-fördelningen: $N(E) = 1/[\exp((E - E_F)/kT) + 1]$

Lösning

a) Det synliga spektrumet ligger i intervallet 380 – 750 nm, eller 3.26 – 1.65 eV. En halvledare som har ett bandgap större än den övre gränsen i energi (3.26 eV) kommer vara helt genomskinlig om den är monokristallin och defektfri. Halvledare som har bandgap i det synliga intervallet blir normalt sett färgade och delvis genomskinliga (eftersom en del av det synliga spektrumet absorberas). Av de halvledare som föreslogs kan därför de med bandgap större än den undre gränsen (1.65 eV) av det synliga spektrumet uteslutas direkt. Ett undantag kan göras för CdSe som ligger precis på gränsen och därför är svårbedömd utan mer information. De som kan uteslutas är alltså ZnTe, GaN och diamant (och CdSe

är ok att ta med, men även ok att inte ta med) eftersom de är genomskinliga eller delvis genomskinliga och färgade.

b) (Se även Harris, new intern. ed. sidorna 448-449). Ledningsförmågan $\sigma \propto N_{LB}$ som är antal elektroner i ledningsbandet. Givet:

$$N(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

Givet:

$$\sigma(300K) = 1/2\sigma(309K)$$

$$\frac{N_{LB}(309K)}{N_{LB}(300K)} = 2$$

$$N_{LB} = \int_{E_F+1/2E_g}^{\infty} \frac{D}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} dE$$

Anta att D , tillståndstätheten är konstant.

Från [Beta]

$$N_{LB} = DTk_B \ln(1 + e^{-E_g/2k_B T})$$

$$\ln(1 + \epsilon) \simeq \epsilon$$

där ϵ är liten.

$$N_{LB} = DTk_B e^{-E_g/2k_B T}$$

Sätt upp kvoten för $T_1 = 300K$ och $T_2 = 309K$.

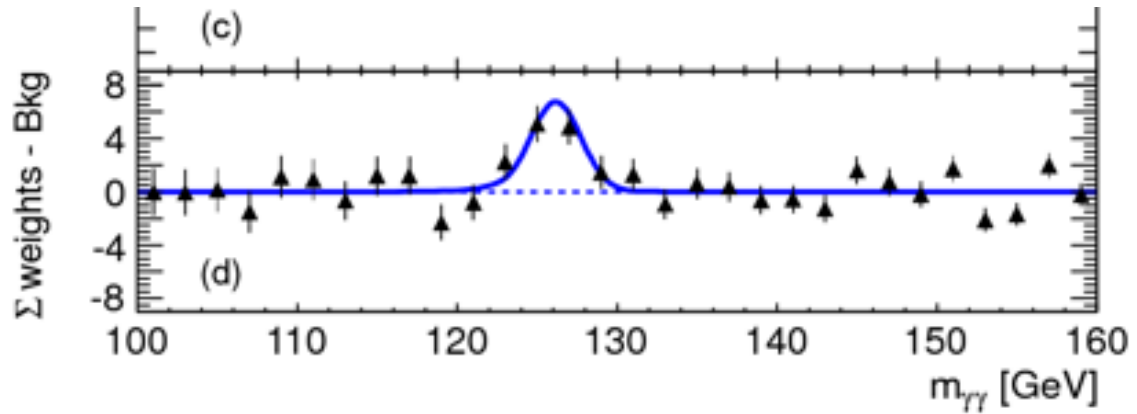
$$2 = \frac{N_{LB}(309K)}{N_{LB}(300K)} = T_2/T_1 e^{E_g/2k_B (1/T_1 - 1/T_2)}$$

Sätt in värden $T_1, T_2, k_B \Rightarrow E_g = 1.18eV \Rightarrow$ Si

Uppgift 8

Fråga

En partikel som i alla hittills mätta avseenden är kompatibel med Higgs bosonen förklarades upptäckt av LHC-experimenten vid CERN i juli 2012. I ATLAS-experimentets publikation som släpptes en dryg månad senare finns nedanstående delfigur. Använd denna för att uppskatta Higgs-bosonens $126 \text{ GeV}/c^2$, livslängd. Tips: tänk på osäkerhetsrelationen. Figurens x-axel är invarianta massan (i GeV/c^2) av två fotoner som tros komma från Higgs-bosonens sönderfall. Invarianta massan motsvarar vilomassan för en partikel mätt från dess sönderfallsprodukter. Y-axeln är antalet fall en viss massa mätts efter att bakgrund har subtraherats. Den heldragna kurvan är en anpassning. [5p]



Lösning

Enligt Heisenbergs osäkerhetsrelation gäller

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

I figuren kan man se att Higgs-bosonens vilomassa är ca $126 \text{ GeV}/c^2$, vilket ger energin $E = 126 \text{ GeV}$ ($E = mc^2$). Osäkerheten i energin får man från toppens bredd, som är $\Delta E \approx 4 \text{ GeV}$. Insättning i osäkerhetsrelationen ger $\Delta t = \hbar/(2\Delta E) \approx 10^{-25} \text{ s}$. Detta betyder att Higgs-bosonens livstid är av storleksordningen 10^{-25} s .