



Lösningsförslag till tentamen
11 april 2023

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt A vara följande matris med element i kroppen $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm det karakteristiska polynomet $p_A(x)$, minimalpolynomet $q_A(x)$ och Jordans normalform till A . **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi börjar med att beräkna det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} p_A(x) &:= \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= x(x-1) \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)((x-1)^2 - 1) = x(x-1)(x^2 - 2x) = x^3(x-1). \end{aligned}$$

Minimalpolynomet har samma rötter (0 och 1) men multipliciteten kan vara mindre. Alltså är $q_A(x)$ något av följande polynom $x(x-1)$, $x^2(x-1)$, $x^3(x-1)$. Frågan är alltså om $A^2 = A$, $A^3 = A^2$ eller $A^4 = A^3$. Vi beräknar

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alltså är minimalpolynomet $x^2(x-1)$.

Summan av storleken av blocken i Jordans normalform för ett egenvärde är den algebraiska multipliciteten, alltså 3 för $\lambda = 0$ och 1 för $\lambda = 1$. Frågan är om blockens storlek för $\lambda = 0$ är $1 + 1 + 1$, $1 + 2$ eller 3. Att minimalpolynomet har multiplicitet 2 för $\lambda = 0$ innebär att det största blocket har storlek 2 vilket ger $1 + 2$. Alternativt kan vi beräkna den geometriska multipliciteten hos $\lambda = 0$ till 2 vilket betyder att det är två stycken block, dvs $1 + 2$. Alltså har vi att Jordans normalform är

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svar. Kar. polynom $p_A(x) = x^3(x-1)$, minimalpolynom $q_A(x) = x^2(x-1)$ och Jordans normalform med två block av storlek $1 + 2$ för $\lambda = 0$ och ett block av storlek 1 för $\lambda = 1$.

2. Låt $z \in \mathbb{C}$ vara ett komplext tal och betrakta matrisen $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & z \\ i & 1 + 2iz \end{bmatrix}$. Bestäm alla värden på z för vilka A är Hermitesk och/eller unitär. Beräkna även egenvärdena för A för alla sådana z . **(4 p)**

Lösningsförslag. Att A är Hermitesk betyder att $A^\dagger = A$, dvs att A är konjugatsymmetrisk. Detta betyder att $z = \bar{i} = -i$ och att $1 + 2iz$ är reellt. Detta har den unika lösningen $z = -i$ vilket ger den Hermiteska matrisen

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}.$$

Den har karakteristiskt polynom $\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} = x^2 - \sqrt{2}x - 2$ och egenvärdena $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{5})$ vilka är reella som förväntat.

Att A är unitär betyder att $A^\dagger A = I$ eller ekvivalent att kolonnerna har norm 1 och är ortogonala mot varandra. Ortogonaliteten ger

$$0 = \overline{-1} \cdot z + \bar{i} \cdot (1 + 2iz) = -z - i + 2z = z - i$$

Vilket har den unika lösningen $z = i$. Vi får då matrisen

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

vilken även har kolonner av norm 1. Alltså är A unitär. Matrisen har karakteristiskt polynom $\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ och egenvärden $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm i)$ vilka har belopp 1 som förväntat.

Svar. För $z = -i$ så är matrisen Hermitesk med de reella egenvärden $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{5})$.

För $z = i$ så är matrisen unitär med egenvärden $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm i)$ av belopp 1.

3. Ge vektorrummet $\mathbb{C}[x]_{\leq d}$ av komplexa polynom av grad $\leq d$ den inre produkten så att $1, x, x^2, \dots, x^d$ är en ortonormal bas. Låt $L: \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{C}[x]_{\leq 1}$ vara den linjära avbildningen som ges av $L(p) = p'(x) + ip(0)$. Bestäm en singularvärdesuppdelning för L , dvs ange singularvärden och motsvarande ortonormala baser för $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ och $\mathbb{C}[x]_{\leq 1}$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi har att $L(1) = i$, $L(x) = 1$ och $L(x^2) = 2x$. Detta ger matrisen

$$A := [L] = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

För att hitta singularvärdena och de högra singularvektorer betraktar vi

$$A^\dagger A = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Denna matris har karakteristiskt polynom $(x - 4)((x - 1)^2 - 1) = (x - 4)x(x - 2)$. Alltså är egenvärdena 0, 2, 4, dvs singularvärdena är 0, $\sqrt{2}$, 2. Motsvarande egenvektorer är höger singularvektorer. Vi beräknar:

$$\begin{aligned} \ker(A^\dagger A) &= \ker A = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \ker(A^\dagger A - 2I) &= \ker \begin{bmatrix} -1 & -i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \ker(A^\dagger A - 4I) &= \ker \begin{bmatrix} -3 & -i & 0 \\ i & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Efter normalisering ger detta de tre höger singulara vektorerna:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eller uttryckt i det ursprungliga vektorrummet:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-ix + 1) && (\text{singularvärde } 0) \\ p_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ix + 1) && (\text{singularvärde } \sqrt{2}) \\ p_2(x) &= x^2 && (\text{singularvärde } 2). \end{aligned}$$

Vi får sedan motsvarande vänster singulara vektorer via

$$\begin{aligned} q_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}L(p_1) = \frac{1}{2}(i + i) = i \\ q_2(x) &= \frac{1}{2}L(p_2) = \frac{1}{2}(2x) = x. \end{aligned}$$

Notera att $\{p_0, p_1, p_2\}$ och $\{q_1, q_2\}$ verkligen är ON-baser.

Svar. Singulärvärdena är $\sqrt{2}$, 2 och vi har även att $\dim \ker(L) = 1$ (singulärvärde 0) medan $\dim \ker(L^\dagger) = 0$. En bas av högersingulära vektorer är $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-ix + 1)$ (kärnan till L), $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ix + 1)$ (singulärvärde $\sqrt{2}$) och $p_2(x) = x^2$ (singulärvärde 2). En motsvarande bas av vänstersingulära vektorer är $q_1(x) = i$ (singulärvärde $\sqrt{2}$) och $q_2(x) = x$ (singulärvärde 2).

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppen *stokastisk* vektor och *stokastisk* matris. (1 p)
- (b) Visa att varje stokastisk matris har egenvärdet 1. (1 p)
- (c) Definiera begreppet *reguljär* matris och formulera någon version av Perron–Frobenius sats. (1 p)
- (d) Ge exempel på en reguljär *Hermiteisk* stokastisk matris A av storlek 3×3 och bestäm det stationära tillståndet i motsvarande Markov-process. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) En stokastisk vektor är en kolonnvektor med icke-negativa element vars summa är 1. En stokastisk matris är en kvadratisk matris där alla kolonner är stokastiska vektorer.
- (b) Låt A vara en stokastisk matris och $\mathbf{r} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$ vara radvektorn som består av enbart ettor. Då är $\mathbf{r}A = \mathbf{r}$ eftersom A är stokastisk. Därför är $A^T \mathbf{r}^T = (\mathbf{r}A)^T = \mathbf{r}^T$. Alltså har A^T egenvärdet 1. Men då har även A egenvärdet 1 ty A och A^T har samma karakteristiska polynom.
- (c) En matris A är reguljär om A^n är positiv för något heltal $n \geq 1$, dvs om alla element i A^n är positiva. En version av Perron–Frobenius sats säger att om A är reguljär gäller:
 - (i) Egenvärdet $\lambda = 1$ har algebraisk multiplicitet 1 och det finns en unik stokastisk egenvektor $\mathbf{v}$ med egenvärde 1.
 - (ii) Om $\lambda \neq 1$ är ett egenvärde så är $|\lambda| < 1$.
 - (iii) För varje stokastisk vektor $\mathbf{p}$ gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{p} = \mathbf{v}$.
- (d) Om A är Hermiteisk (dvs symmetrisk) och stokastisk så är summan av varje rad 1. Alltså är $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ en stokastisk egenvektor med egenvärde 1. Alla reguljära Hermiteiska stokastiska matriser har alltså samma stationära fördelning. Ett exempel är:

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

vilken är reguljär eftersom A^2 är positiv.

5. (a) Definiera begreppet *minimalpolynom* $q_L(t)$ för en operator $L: V \rightarrow V$. **(1 p)**
- (b) Låt A vara en $n \times n$ -matris med element i en kropp k och låt S vara delrummet av $n \times n$ -matriser som ges av $S = \{p(A) : p(t) \in k[t]\}$, dvs alla polynom i A med koefficienter i k . Visa att dimensionen av S är lika med graden av minimalpolynomet $q_A(t)$. **(2 p)**
- (c) Låt $k = \mathbb{R}$ och ge exempel på en matris A sådan att S (under addition och multiplikation av matriser) blir en kropp som är isomorf med $\mathbb{C}$. **(1 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Minimalpolynomet $q_L(t)$ är det moniska polynom av minimal grad så att $q_L(L) = 0$.
- (b) Om $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1x + a_0$ är ett moniskt polynom så att $p(A) = 0$ så är $A^d = -a_0I - a_1A - a_2A^2 - \dots - a_{d-1}A^{d-1}$ och alltså är $A^d \in \text{Span}\{I, A, A^2, \dots, A^{d-1}\}$. Omvänt, om $A^d \in \text{Span}\{I, A, A^2, \dots, A^{d-1}\}$ så finns skalärer b_i så att $A^d = b_0I + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{d-1}A^{d-1}$ vilket ger att $p(A) = 0$ för det moniska polynomet $p(x) = x^d - b_{d-1}x^{d-1} - \dots - b_1x - b_0$. Detta innebär att graden av minimalpolynomet $q_A(x)$ är det minsta heltal d så att $A^d \in \text{Span}\{I, A, A^2, \dots, A^{d-1}\}$. Men då är $I, A, A^2, \dots, A^{d-1}$ linjärt oberoende. Vi har även att $A^n \in \text{Span}\{I, A, A^2, \dots, A^{d-1}\}$ för alla $n \geq d$ eftersom $A^d = b_0I + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{d-1}A^{d-1}$ ger att $A^n = b_0A^{n-d} + b_1A^{n-d+1} + b_2A^{n-d+2} + \dots + b_{d-1}A^{n-1}$ och genom att upprepa detta får vi att A^n går att skriva som en linjärkombination av $I, A, A^2, \dots, A^{d-1}$.
- (c) Vi behöver en matris A som beter sig som imaginära enheten, dvs $A^2 = -I$. Ta till exempel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Då är minimalpolynomet $q_A(t) = t^2 + 1$ irreducibelt så $S = \text{Span}\{I, A\}$ är en kropp. En explicit isomorfi $\varphi: S \rightarrow \mathbb{C}$ ges av $\varphi(aI + bA) = a + bi$.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Betrakta de två Markovprocesserna som ges av matriserna

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm alla stationära tillstånd till de två Markovprocesserna. (2 p)
 (b) Avgör om de två Markovprocesserna konvergerar oavsett starttillstånd. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Ett tillstånd $\mathbf{p}$ är stationärt för A om $A\mathbf{p} = \mathbf{p}$, dvs om $\mathbf{p}$ är en stokastisk egenvektor med egenvärde 1. Vi beräknar egenrummet till egenvärdet 1 för A :

$$\ker(A - I) = \ker \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

vilket ger den unika stokastiska egenvektorn $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Samma beräkning för B ger:

$$\ker(B - I) = \ker \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi har en bas av stokastiska egenvektorer

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och vi ser att alla stokastiska egenvektorer ges som linjärkombinationer $\alpha \mathbf{b}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{b}_2$ där $\alpha \in [0, 1]$. Detta är alltså de stationära tillstånden till B .

- (b) Ingen av matriserna är reguljära. Detta visar dock inte att de inte konvergerar. Processen B är inte konvergent då den har flera olika stationära tillstånd. Processen A har visserligen bara ett stationärt tillstånd men är ändå inte konvergent: med starttillståndet $\mathbf{e}_1$ har vi att $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3$ och $A^2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ så processen hoppar fram och tillbaka mellan $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_3$ utan att konvergera. (Processen A är irreducibel medan B är reducibel.)

Svar.

- (a) Processen A har det unika stationära tillståndet $\frac{1}{2}(1, 0, 1)$. Processen B har de stationära tillstånden: $\frac{1}{5}(2\alpha, 0, 5(1 - \alpha), 3\alpha)$ där $\alpha \in [0, 1]$.
 (b) Ingen av processerna konvergerar.

7. Låt A vara en reell 2×2 -matris med reella egenvärden $a_1 < b_1$. Betrakta rekursionsekvationen

$$X_n = 2X_{n-1} + 3X_{n-2} \quad \forall n \geq 2, \quad X_0 = I, \quad X_1 = A$$

där X_n är reella 2×2 -matriser.

- (a) Visa att egenvärdena a_n och b_n för X_n endast beror på a_1 och b_1 och inte på A . **(2 p)**
 (b) Ge en explicit formel för egenvärdena a_n och b_n då $a_1 = 0$ och $b_1 = 3$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Eftersom $a_1 \neq b_1$ så är A diagonaliserbar. Eftersom I och A kommuterar så är de samtidigt diagonaliserbara. Detta innebär att alla X_n är samtidigt diagonaliserbara. Mer konkret, välj en basbytesmatris P så att $A = PDP^{-1}$ med $D = \text{diag}(a_1, b_1)$. Låt $D_n = P^{-1}X_nP$. Då är alltså $D_0 = I$ och $D_1 = \text{diag}(a_1, b_1)$ och vi får rekursionen $D_n = 2D_{n-1} + 3D_{n-2}$ för alla $n \geq 2$. Alltså är D_n en diagonalmatris för alla n . Men egenvärdena för X_n och D_n är lika och D_n beror bara på a_1 och b_1 .

- (b) Eftersom $D_n = \text{diag}(a_n, b_n)$ får vi rekursionsformlerna $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ och $b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$ med initialvillkoren $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ och $b_0 = 1$, $b_1 = 3$. Vi löser därför först rekursionsekvationen $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ för allmänna initialvärden x_0 , x_1 . Vi inför $\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}^T$ och kan då skriva rekursionen som en matrisekvation:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{n-1}}.$$

Egenvärdena till B är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$ med egenvektorer $\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\xi_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$. Om $\mathbf{v}_1 = c\xi_1 + d\xi_2$ så är alltså $\mathbf{v}_n = c(-1)^{n-1}\xi_1 + d3^{n-1}\xi_2$. Genom att titta på första koordinaten ger detta att

$$x_n = c \cdot (-1)^n + d \cdot 3^n$$

där c och d bestäms ur $\mathbf{v}_1 = c\xi_1 + d\xi_2$ (eller ekvivalent direkt från uttrycket för x_n ovan med $n = 0$ och $n = 1$) till:

$$\begin{cases} x_0 = c + d \\ x_1 = -c + 3d \end{cases} \iff \begin{cases} 4c = 3x_0 - x_1 \\ 4d = x_0 + x_1. \end{cases}$$

Lösningarna för a_n och b_n blir alltså:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4}(3 - 0)(-1)^n + \frac{1}{4}(1 + 0)3^n = \frac{3}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}3^n \\ b_n &= \frac{1}{4}(3 - 3)(-1)^n + \frac{1}{4}(1 + 3)3^n = 3^n. \end{aligned}$$

Svar. $a_n = \frac{3}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}3^n$ och $b_n = 3^n$.

8. Låt A vara en komplex $m \times n$ -matris där alla kolonner har norm 1.
- (a) Visa att $1 \leq \text{rk } A \leq \min\{m, n\}$ och att alla värden i detta intervall är möjliga. **(1 p)**
 - (b) Visa att alla singularvärden till A ligger i intervallet $[0, \sqrt{n}]$. **(2 p)**
 - (c) För alla m, n , ge exempel där A har ett singularvärde $\sqrt{n}$. **(1 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Låt kolonnerna i A kallas $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^m$. Då är rangen av A dimensionen av bildrummet $\text{im}(A) = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Eftersom $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ för alla i så är $\dim(\text{im}(A)) \geq 1$. Samtidigt är $\text{rk } A \leq m$ eftersom bildrummet är ett delrum av $\mathbb{C}^m$ och $\text{rk } A \leq n$ eftersom bilden spänns upp av n vektorer. Ett exempel på en matris med rang r för $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ ges av

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 & \mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{e}_1 \quad (\text{om } r < n) \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{v}_{r+2} = \mathbf{e}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_r = \mathbf{e}_r & \mathbf{v}_n = \mathbf{e}_1. \end{array}$$

- (b) Egenvärdena till $A^\dagger A$ är singularvärdena i kvadrat. Speciellt är spåret av $A^\dagger A$ summan av singularvärdena i kvadrat:

$$\text{tr}(A^\dagger A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

Men eftersom kolonnerna har norm 1 så är

$$\text{tr}(A^\dagger A) = \sum_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle = n.$$

Alltså är singularvärdena, som alltid är positiva, aldrig större än $\sqrt{n}$.

- (c) Välj alla kolonner lika, t ex $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = \dots = \mathbf{v}_n = \mathbf{e}_1$. Då är rangen $r = 1$ och $A^\dagger A$ är $n \times n$ -matrisen som består av enbart ettor. Denna har egenvektorn $\xi = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n$ med egenvärdet n . (Resterande egenvärden är 0 eftersom kärnan till $A^\dagger A$ har dimension $n - 1$.) Alltså är det enda singularvärdet $\sigma_1 = \sqrt{n}$.

9. Låt $M_{n,n}$ vara vektorrummet av komplexa $n \times n$ -matriser. Låt $L: \bigwedge^2 M_{n,n} \rightarrow M_{n,n}$ vara den linjära avbildningen som uppfyller $L(A \wedge B) = AB - BA$ för $A, B \in M_{n,n}$. Låt $M_{n,n}$ ha den inre produkten som ges av $\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^\dagger B)$. Bestäm en ortonormal bas för det ortogonala komplementet $\text{im}(L)^\perp$ av bilden $\text{im}(L)$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt E_{ij} vara matrisen som är noll förutom en etta på rad i och kolumn j . Då är $\{E_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ en ortonormal bas för $M_{n,n}$. En bas för $\bigwedge^2 M_{n,n}$ ges av $E_{ij} \wedge E_{kl}$ där $1 \leq i, j, k, l \leq n$ och $(i, j) < (k, l)$ för någon lämplig ordning. Ignorerar vi $(i, j) < (k, l)$ får vi fortfarande något som spänner upp $\bigwedge^2 M_{n,n}$.

Vi noterar att

$$L(E_{ij} \wedge E_{kl}) = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}.$$

Speciellt är

$$L(E_{i1} \wedge E_{1j}) = E_{ij} \quad \forall i \neq j.$$

Vi har också att

$$L(E_{ij} \wedge E_{ji}) = E_{ii} - E_{jj} \quad \forall i, j.$$

Matriserna E_{ij} , $i \neq j$ och $E_{ii} - E_{jj}$ spänner upp hela bilden ty

$$L(E_{ij} \wedge E_{kl}) = \begin{cases} E_{il} & \text{om } j = k \text{ och } i \neq l \\ -E_{kj} & \text{om } i = l \text{ och } j \neq k \\ E_{ii} - E_{jj} & \text{om } j = k \text{ och } i = l \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

En matris $A = (a_{ij})$ är ortogonal mot E_{ij} om $a_{ij} = 0$ och ortogonal mot $E_{ii} - E_{jj}$ om $a_{ii} = a_{jj}$. Det är således endast aI för $a \in \mathbb{C}$ som är ortogonal mot hela bilden. Alltså är $\text{im}(L)^\perp = \text{Span}\{I\}$.

En ortonormal bas för $\text{im}(L)^\perp = \text{Span}\{I\}$ ges av $\frac{1}{\sqrt{n}}I$.

Ann. Eftersom $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ kan man direkt se att bilden består av matriser med spår 0.

Svar. Det ortogonala komplementet $\text{im}(L)^\perp$ är endimensionellt och har den ortonormala basen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}I \right\}$.