

Lösningsförslag till Tentamen i Modern Fysik (SH1012)

08.00–13.00, 2013-05-21, KTH, Stockholm

1. Problem:

Robert Millikan gjorde år 1916 noggranna mätningar av den fotoelektriska effekten för att se om Einsteins förklaring av fenomenet stämde och för att bestämma Plancks konstant. Millikan lät ljus av olika våglängd träffa en metallyta och mätte de från ytan emitterade elektronernas maximala energi för resp. våglängd. I en mätserie fick han följande elektronenergier för de olika våglängderna:

λ [Å]	E_{e^-} [eV]
6560	inga e^-
4339	0.551
4047	0.755
3650	1.086
3126	1.650

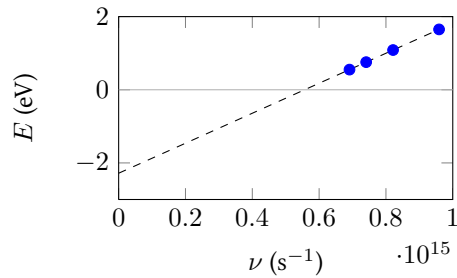
Millikan använde sitt eget värde för elektronens laddning: $1.592 \cdot 10^{-19}$ [C]. Tänk dig att du är Millikan och bestäm Plancks konstant, h , baserat på ovanstående [4 p]. Bestäm även utträdesarbetet för metallen [1 p].

Lösning:

Einsteins formel för fotoelektriska effekten lyder: $E_{e^-} = h\nu - W$, där W är utträdesarbetet. Vi räknar först ut värden för $\nu = c/\lambda$ motsvarande tabellen:

ν [s $^{-1}$]
$6.909 \cdot 10^{14}$
$7.408 \cdot 10^{14}$
$8.213 \cdot 10^{14}$
$9.590 \cdot 10^{14}$

Därmed kan vi plotta E mot ν :



Punkterna ligger som väntat längs en rät linje. Vi kan för lösningen antingen använda minsta-kvadrat-anpassning av linjen eller (för enklare räkningar) använda första och sista punkten för linjens ekvation. Plancks konstant ges av lutningen och får värdet: $h = 4.10 \cdot 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$. Med Millikans värde för elektronens laddning så ger detta $6.53 \cdot 10^{-34} \text{ J}$. Utträdesarbetet motsvarar energivärdet (med omvänt tecken) där linjen korsar $\nu = 0$. Vi ser i figuren att W ligger strax över 2 eV. Anpassning ger $W = 2.28 \text{ eV}$.

2. Problem:

Efter den stora tsunamin på Japanska östkusten 2011 havererade flera kärnreaktorer vid kraftverksanläggningen i Fukushima. Stora mängder radioaktivt material läckte ut till omgivningen.

Ett stort problem är kontamination av åkrar i stora områden kring kärnkraftverket från den radioaktiva nukliden ^{137}Cs (halveringstid: 30.17 år). Gränsvärdet i Japan för ^{137}Cs i odlingsbar åkerjord är 5000 Bq/kg.

En lantbrukare uppmäter år 2013 ett värde på 18000 Bq/kg för jorden i en av sina åkrar. När kommer åkern kunna användas till odling? [2 p]

Nukliden ^{137}Cs produceras vid fission av (i detta fall) ^{235}U som var bränslet i Fukushimas kärnreaktorer. Vid fission träffas ^{235}U -kärnan av en långsam neutron som absorberas. Systemet fissionerar kort därefter så att två fissionsprodukter och ett antal neutroner blir kvar.

Antag för en viss fissionsreaktion att ^{137}Cs är den ena fissionsprodukten och att tre neutroner skickas ut. Vilken är då den andra fissionsprodukten? [1 p]

Använd atomära massor för att räkna ut den energi som frigörs vid denna fissionsreaktion. [2 p]

Lösning, del 1:

Vi har för antalet atomkärnor, N , av ett radioaktivt ämne: $N = N_0 e^{-\lambda t}$, där t är tiden och N_0 är antalet vid $t = 0$. Sönderfallskonstanten λ förhåller sig till aktiviteten A enligt: $A = \lambda N$. Dessutom har vi $\lambda = \ln(2)/t_{1/2}$, där $t_{1/2}$ är halveringstiden. Således, med tiden i enhet år, får vi:

$$A = A_0 e^{-\ln(2)t/t_{1/2}}$$

$$t = \frac{t_{1/2} \cdot \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{-\ln(2)} = \frac{30.17 \cdot \ln\left(\frac{5000}{18000}\right)}{-\ln(2)} = 55.8.$$

Lantbrukaren behöver vänta i ca 56 år innan jorden går att bruka igen.

Lösning, del 2:

Vi har för U-235: 92 protoner och $235-92=143$ neutroner. När neutronen absorberas

får vi ytterligare en neutron i systemet, dvs 92 protoner och 144 neutroner. Cs-137 har 55 protoner och $137-55=82$ neutroner. Dessutom emitteras tre neutroner. Den andra fissionsprodukten får därför: $92-55=37$ protoner och $144-82-3=59$ neutroner. Masstalet blir $37+59=96$. Ämnet är rubidium och isotopen är ^{96}Rb .

Den frigjorda energin motsvarar skillnaden i massa före och efter reaktionen: Massa före:

$$M(\text{neutron}) + M(U - 235) = 1.008665 + 235.043929 = 236.052594 [u].$$

Massa efter:

$$\begin{aligned} 3 \cdot M(\text{neutron}) + M(Cs - 137) + M(Rb - 96) = \\ 3 \cdot 1.008665 + 136.907089 + 95.934272 = 235.867356 [u]. \end{aligned}$$

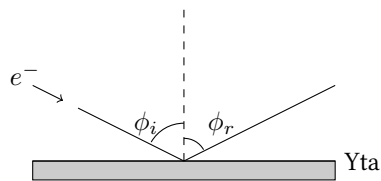
Skillnad i massa:

$$\Delta M = 0.185238 [u] = 0.185238 \cdot 931.502 \text{ MeV}/c^2 = 172.52 \text{ MeV}/c^2.$$

Denna skillnad i massa motsvarar enligt Einstein ($E = \Delta M c^2$) energin 172.52 MeV.

3. Problem:

Metallen polonium har en enkel kubisk kristallstruktur. I ett experiment är en poloniumkristall slipad så att atomplanen ligger parallellt med kristallytan. Elektroner accelereras över ett spänningsgap på 40 V och träffar sedan en kristallen i den variabla infallsvinkeln ϕ_i mot ytans normal. De reflekterade elektronerna uppmäts i reflektionsvinkeln $\phi_r = \phi_i$.



De reflekterade elektronerna har sitt första intensitetsmaximum då $\phi = 73.2^\circ$. Bestäm avståndet mellan atomplanen i polonium [5 p].

Lösning:

Enligt Braggs lag har vi $2d\sin\theta = n\lambda$ där θ är den s.k. glansvinkeln, d är avståndet mellan atomplanen, och λ är elektronens våglängd. I detta fall har vi $\theta = 90^\circ - \phi$, så att:

$$2d\sin(90^\circ - \phi) = n\lambda$$
$$d = \frac{n\lambda}{2\sin(90^\circ - \phi)} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Våglängden fås från de Broglie: $\lambda = h/p = \dots = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Eftersom elektronens kinetiska energi, $E_k = 40$ eV, är storleksordningar mindre än dess viloenenergi ($m_0 c^2 = 511$ keV) så kan vi försumma den relativistiska faktorn:

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}} = \frac{4.13570 \cdot 10^{-15} [\text{eV s}]}{\sqrt{2 \cdot 511 \cdot 10^3 \cdot 40 [\text{eV}^2/c^2]}} = 1.94 \cdot 10^{-10} [\text{m}].$$

Med $\phi = 73.2^\circ$ och $n = 1$ så får vi nu, enligt formeln ovan för d :

$$d = \frac{1.94 \cdot 10^{-10}}{2\sin(90^\circ - 73.2^\circ)} = 3.35 \cdot 10^{-10} [\text{m}]$$

Avståndet mellan atomplanen är 3.35 Å.

4. Problem:

Härled formeln för tidsdilatation från Lorentztransformationen [3 p].

En atomkärna som färdas med hastigheten $\frac{v}{c} = 0.8$ längs x -axeln exciteras till ett högre energitillstånd vid punkten $x = 0$ i ett experiment. Sett från atomkärnans inertialsystem så skickar den sedan ut en gammastråle exakt $0.25 \cdot 10^{-9}$ [s] efter excitationen. Sett från det stillastående labsystemet, hur långt är det från $x = 0$ till punkten x_1 från vilken gammastrålen skickas ut? [2 p].

Lösning, del 1:

Den inversa L-transformationen för tiden ges av:

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'). \quad (1)$$

Vi kan tänker oss nu två händelser. Händelse 1 uppfattas vid (x_1, t_1) i S och vid (x'_1, t'_1) i S' . Händelse 2 uppfattas vid (x_2, t_2) i S och vid (x'_2, t'_2) i S' . Vi kan nu skriva ekv. 1 först för händelse 1, sedan för händelse 2, och sedan subtrahera de två uttrycken:

$$t_2 - t_1 = \gamma((t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)). \quad (2)$$

Om de två händelserna inträffar vid samma punkt i S' , dvs $x'_2 = x'_1$ så får vi:

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) \quad (3)$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad (4)$$

dvs formeln för tidsdilatation.

Lösning, del 2:

Om labssystemets inertialsystem är S och atomkärnans inertialsystem är S' så kan vi använda vår härledda formel för tidsdilatation:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{0.25 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 0.417 \cdot 10^{-9} \text{ [s]}. \quad (5)$$

Using the velocity $v = 0.8c$, we can now calculate the distance:

$$\Delta x = \Delta t \cdot v = \dots = 0.10 \text{ [m]}. \quad (6)$$

Vi ser att atomkärnan rör sig 10 cm i labssystemet innan den skickar ut gammafotonen.

5. Problem:

Skriv upp det relativistiska uttrycket för rörelseenergin E_k och visa att det övergår i det klassiska uttrycket $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$ vid låga hastigheter [3 p]. En proton rör sig med hastigheten $\frac{v}{c} = 0.95$ i en accelerator har en viss kinetisk energi, E_k . Hur många gånger högre blir E_k vid $\frac{v}{c} = 0.99$? [2 p].

Lösning, del 1:

Rörelseenergin kan skrivas:

$$E_k = m_0c^2(\gamma - 1). \quad (7)$$

Vi Taylorutvecklar kring $v = 0$:

$$E_k = m_0c^2(\gamma - 1) = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \approx m_0c^2 \left[1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{v^2}{c^2} \right) - 1 \right] = \frac{m_0v^2}{2}, \quad (8)$$

dvs vi får det klassiska uttrycket för kinetisk energi, $E_k = m_0v^2/2$.

Lösning, del 2:

Vi kan skriva kvoten på följande sätt:

$$R = \frac{E_k(v/c = 0.99)}{E_k(v/c = 0.95)} = \frac{m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} - 1 \right)}{m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0.95)^2}} - 1 \right)} = 2.76$$

Den kinetiska energin blir 2.76 gånger högre.

6. Problem:

En elektron rör sig i positiv x -led och träffar på en rektangulär potentialbarriär med energin 5 eV och längden 12 Å. Hitta en elektronenergi i intervallet 7 – 9 eV för vilken vi inte får någon reflektion alls. [5 p].

Lösning:

Vi skriver upp följande formel för reflektionssannolikheten från formelbladet:

$$R = \frac{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right]}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)}$$

Villkoret för $R = 0$ är alltså:

$$\begin{aligned}\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] &= 0 \\ \sin \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] &= 0 \\ \sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) &= n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ E - U_0 &= \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ E &= \frac{n^2 h^2}{8ma^2} + U_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Med insatta värden ($m = m_e$, $a = 12 \cdot 10^{-10}$ m, $U_0 = 5$ eV, $h = 4.13570 \cdot 10^{-15}$ eV · s) så får vi:

$$E = 0.26113 \cdot n^2 + 5 \text{ [eV]} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Genom att testa med olika heltalsvärden för n så ser vi att endast $n = 3$ ger ett värde för E i intervallet 7 – 9 eV, nämligen 7.35 eV.

7. Problem:

Endast en av följande elektronkonfigurationer (a,b,c,d) är tillåten.

konfiguration a: $1s^2 2s^2 2p^8 3s^2 3p^2$

konfiguration b: $1s^2 2s^4 2p^6 3s^2 3p^3$

konfiguration c: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3s^1$

konfiguration d: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$

Vilken är den korrekta konfigurationen och vilken är atomen som den motsvarar? Motivera för varje icke-giltig konfiguration varför du förkastar den [4 p]. Vilken viktiga princip har vi brutit mot i de övriga 3 icke-giltiga konfigurationerna? [1 p].

Lösning, del 1:

Konfiguration d är korrekt. Det totala antalet elektroner är $2 + 2 + 6 + 2 + 5 = 17$, dvs vi har grundämnet klor (Cl).

Fel i konf. a: $2p^8$ otillåtet. Vi får endast ha $2l + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 6$ elektroner i $2p$ -skalet.
Fel i konf. b: $2s^4$ otillåtet. Vi får endast ha $2l + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2$ elektroner i $2s$ -skalet.
Fel i konf. c: $3s^2 3s^1$ otillåtet. Vi får endast ha $2l + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2$ elektroner i $3s$ -skalet och vi får inte ha två olika $3s$ -skal.

Lösning, del 2:

Vi har, i konfigurationerna a, b, och c, brutit mot Pauliprincipen, som säger att varje elektron har en unik uppsättning kvanttal.

8. Problem:

Den kvantmekaniska lösningen för elektronens vågfunktion i väteatomen kan genom variabelseparation delas upp i tre delar: $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi)$. Ekvationen för $\Phi(\phi)$ får då följande form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k\Phi = 0,$$

där k är en reell konstant. Ta fram lösningen för $\Phi(\phi)$ och visa genom randvillkor hur det magnetiska kvanttalet m_l förhåller sig till k , samt visa vilka värden m_l kan antaga baserat på denna ekvation [5 p].

Lösning:

Vi ska vid derivering två gånger av Φ ska vi få $-k\Phi$. En funktion som uppfyller detta krav är en exponentialfunktion med imaginärt argument:

$$\Phi(\phi) = e^{i\phi\sqrt{k}}.$$

Vi kan nu använda ett cykliskt randvillkor. Före och efter rotation av vinkeln ϕ ett varv runt origo måste ju vågfunktionen vara identisk:

$$\begin{aligned}\Phi(\phi + 2\pi) &= \Phi(\phi) \\ e^{i\sqrt{k}(\phi+2\pi)} &= e^{i\phi\sqrt{k}} \\ e^{i2\pi\sqrt{k}} &= 1 \\ \implies \sqrt{k} &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Vi ser att $\sqrt{k}$ inte kan anta andra värden än dessa heltal. Vi kan nu sätta $\sqrt{k} = m_l$ och skriva lösningen på formen:

$$\Phi(\phi) = e^{im_l\phi}.$$