

TENTAMEN, DEL 2
SF1544
NUMERISKA METODER, GRUNDKURS
Tisdag 4 juni 2024 kl 14.00-17.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd.

Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

(15p) 1. Funktionen

$$g(x) = (x - 1)^4 + 1$$

har fixpunkterna $\bar{x} = 1$ och $\bar{x} = 2$.

Betrakta fixpunktsiterationen

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

med startgissning x_0 .

- a) (4p) För de två fixpunkterna, visa att de verkligen är fixpunkter och bestäm om fixpunktsiterationen konvergerar lokalt eller om den divergerar.
- b) (8p) För alla startgissningar i intervallet $0 < x < 3$, avgör om fixpunktsiterationen konvergerar, och i så fall mot vilken fixpunkt, eller om den divergerar.
- c) (3p) Skriv Matlabkod som plottar $g(x)$ och x som funktion av x , så att fixpunkterna syns i plotten. För en startgissning $x_0 = 3/2$, gör 10 iterationer. I varje iteration, markera $(x_n, g(x_n))$ med ett $\times$ i figuren.

Lösning:

- a) Sätt in siffror för att visa $g(\bar{x}) = \bar{x}$ för båda fixpunkterna. Vi har $g'(x) = 4(x-1)^3$. Dvs $|g'(1)| = 0$ och $|g'(2)| = 4$. Villkor för lokal konvergens $|g'(\bar{x})| < 1$, vilket endast är uppfyllt för $\bar{x} = 1$. Dvs, fixpunktsiterationen konvergerar lokalt för $\bar{x} = 1$ med divergerar för $\bar{x} = 2$.
- b) Låt $x_0 = 1 + \alpha$ med $0 < \alpha < 1$. Då gäller $x_1 = g(x_0) = 1 + \alpha^4 < x_0$, och vidare $x_2 < x_1$, och iterationen konvergerar mot fixpunkten $\bar{x} = 1$. Om $x_0 = 2$, så är vi redan på fixpunkten $\bar{x} = 2$, och iterationen förändrar ingenting. Om $x_0 = 2 + \alpha$ med $\alpha > 0$ så gäller $x_1 = 4(1 + \alpha)^3 + 1 > 5 + 8\alpha > x_0$, och vidare $x_2 > x_1$ etc. Dvs iterationen divergerar. Till sist, om $x_0 = 1 - \alpha$ med $0 < \alpha < 1$ så blir $x_1 = g(x_0) = 1 + \alpha^4$, precis som i första fallet, och vi konvergerar mot fixpunkten $\bar{x} = 1$. Dvs, för $0 < x_0 < 2$ så konvergerar iterationerna mot fixpunkten $\bar{x} = 1$, för $x_0 = 2$ så är vi på fixpunkten $\bar{x} = 2$, och för $2 < x_0 < 3$ så divergerar iterationerna.

```

c) g=@(x) (x-1).^4+1;
x=linspace(0,2.5,100);
figure;
plot(x,x,'b');
hold on;
plot(x,g(x),'r');
grid on;

x=3/2;
for l=1:10
    xn=x;
    x=g(x);
    plot(xn,x,'kx');
end;

```

(15 p) 2. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -14.00 \\ -9x_1 + 20x_2 = 144.00 \end{cases}$$

har lösningen $x_1 = 4$ och $x_2 = 9$. Antag att högerledets komponenter är korrekt avrundade, vad blir då felgränsen för x_1 och x_2 ?

Alternativ uppgift P2. Formulera och bevisa en sats om konditionstal för lösning av linjära ekvationsystem. *Notera:* Formulera satsen först och definiera alla kvantiteter och specificera alla antaganden (6p). Bevisa därefter satsen (9p).

Lös antingen P2 eller alternativa uppgift P2, inte båda. Om lösningar till den alternativa uppgiften lämnas in är det de som kommer bedömas.

Lösning: Vi skriver först ekvationssystemet i matrix/vektor form $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ där

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -9 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{b} := \begin{bmatrix} -14 \\ 144 \end{bmatrix}.$$

Att högerledets komponenter är korrekt avrundade innebär att de har två korrekta decimaler, dvs absoluta felet för varje komponent begränsas av $0.5 \cdot 10^{-2}$. Om vektorn $\Delta \vec{b}$ representerar osäkerheten i högerledet har vi att alla dess komponenter är till beloppet mindre än eller lika med $0.5 \cdot 10^{-2}$, dvs för att undersöka felgränserna ansätter vi

$$\|\Delta \vec{b}\|_{\infty} = 0.5 \cdot 10^{-2}.$$

Hur ovanstående osäkerhet i $\vec{b}$ fortplantas då man löser ekvationssystemet $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ges nu av följande formel:

$$\|\Delta \vec{x}\|_{\infty} \leq \kappa(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta \vec{b}\|_{\infty}}{\|\vec{b}\|_{\infty}} \cdot \|\vec{x}\|_{\infty}. \quad (*)$$

Här är $\Delta \vec{x}$ felet i lösningen och $\kappa(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$ är konditionstalet of matrisen $\mathbf{A}$. Matrismatrisnormen ovan ges av maximala radsumman, så

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{|1| + |-2|, |-9| + |20|\} = 29.$$

Vidare så har vi att

$$\mathbf{A}^{-1} := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 11,$$

vilket ger konditionstalet $\kappa(\mathbf{A}) = 319$.

Vi har $\|\Delta \vec{b}\|_\infty = 0.5 \cdot 10^{-2}$, $\|\vec{b}\|_\infty = 144$, $\|\vec{x}\|_\infty = 9$. Från (*) får vi

$$\begin{aligned} \|\Delta \vec{x}\|_\infty &\leq \kappa(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta \vec{b}\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} \cdot \|\vec{x}\|_\infty = 319 \cdot \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{144} \cdot 9 < \frac{320 \cdot 9}{2 \cdot 12 \cdot 12} \cdot 10^{-2} \\ &= \frac{8 \cdot 40 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 10^{-2} = 0.1. \end{aligned}$$

$\|\Delta \vec{x}\|_\infty \leq 0.1$ betyder att felet i båda komponenterna i lösningen är mindre än 0.1.

(20 p) 3. Betrakta följande partiella differentialekvation (PDE)

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 2u_{xx}(x, t) - 2u_x(x, t) + u(x, t) & \text{för } x \in (0, 1) \text{ och } t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{för } t \geq 0 \text{ (randvillkor)}, \\ u(x, 0) = 1 + x + e^{\sin(2\pi x)} & \text{för } x \in [0, 1] \text{ (initialvillkor)}. \end{cases} \quad (\dagger)$$

Diskretisera x -variabeln med punkterna $x_j = j\Delta x$ där $\Delta x := 1/N$ för $j = 0, \dots, N$ och approximerar u_x och u_{xx} i $(\dagger)$ med följande finita differenser av noggrannhetsordning 2:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &\approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \\ u_{xx}(x, t) &\approx \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Vi kan nu skriva om $(\dagger)$ som ett initialvärdesproblem för ordinära differentialekvationer (ODE) på formen

$$\begin{cases} \frac{d\vec{w}}{dt} = \mathbf{A}\vec{w} + \vec{b} & \text{för } t \geq 0, \\ \vec{w}(0) = \vec{w}_0 \end{cases} \quad (\ddagger)$$

där $\vec{w}(t) = [w_1(t) \ \dots \ w_{N-1}(t)]^\top$ med $w_j(t) \approx u(x_j, t)$, $t \geq 0$.

- a) (8p) Bestäm den 1a raden i $(N-1) \times (N-1)$ matrisen $\mathbf{A}$.
- b) (8p) Hur förändras 1a raden i $\mathbf{A}$ i $(\ddagger)$ om randvillkoren i $(\dagger)$ ges som $u_x(0, t) = u(1, t) = 0$ för $t \geq 0$? Du kan här använda någon av följande skeva finita differensstenciler för att approximerar derivatan, båda med noggrannhetsordning 2:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &\approx \frac{-u(x + 2\Delta x, t) + 4u(x + \Delta x, t) - 3u(x, t)}{2\Delta x} \\ u_x(x, t) &\approx \frac{3u(x, t) - 4u(x - \Delta x, t) + u(x - 2\Delta x, t)}{2\Delta x} \end{aligned}$$

Observera: Vi utökar inte storleken på matrisen, de obekanta variablerna i $\vec{w}$ är de samma som i uppgift (a).

- c) (4p) Låt $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots$, och låt $\vec{w}^n = \vec{w}(t_n)$. Föreslå en numerisk metod för att tidsstega $(\ddagger)$ som ger en diskretisering i både rum och tid som är numeriskt stabil för alla val av tidssteg $\Delta t > 0$ oberoende av Δx . Skriv ut den diskretisering som fås då denna appliceras på $(\ddagger)$ med $\vec{b} = 0$.

Lösning: PDEn i $(\dagger)$ gäller i alla punkter $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$, så den gäller i synnerhet i punkterna $(x_j, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$, dvs

$$u_t(x_j, t) = 2u_{xx}(x_j, t) - 2u_x(x_j, t) + u(x_j, t), \quad \text{för } j = 0, \dots, N \text{ och } t \geq 0.$$

Finita differenserna i $(*)$ kan nu användas för att approximerar u_{xx} och u_x , där $w_j(t) \approx u(x_j, t)$ för $j = 0, \dots, N$. Vidare har vi att $u_t(x_j, t) \approx \frac{dw_j(t)}{dt}$, så diskretiseringen av

(*) blir

$$\begin{aligned}\frac{dw_j}{dt}(t) &= 2 \frac{w_{j+1}(t) - 2w_j(t) + w_{j-1}(t)}{\Delta x^2} - 2 \frac{w_{j+1}(t) - w_{j-1}(t)}{2\Delta x} + w_j(t) \\ &= \frac{(2 + \Delta x)w_{j-1}(t) + (-4 + (\Delta x)^2)w_j(t) + (2 - \Delta x)w_{j+1}(t)}{\Delta x^2}\end{aligned}$$

för $j = 1, \dots, N - 1$ och $t \geq 0$.

Första raden i matrisen $\mathbf{A}$ ges av att ekvationen för $j = 1$,

$$\frac{dw_1}{dt}(t) = \frac{(2 + \Delta x)w_0(t) + (-4 + (\Delta x)^2)w_1(t) + (2 - \Delta x)w_2(t)}{\Delta x^2} \quad (\circ\circ)$$

a) Randvillkoret $u(0, t) = 0$ ger $w_0(t) := u(0, t) = 0$, så $(\circ\circ)$ ger

$$\frac{dw_1}{dt}(t) = \frac{(-4 + (\Delta x)^2)w_1(t) + (2 - \Delta x)w_2(t)}{\Delta x^2}$$

$N - 1$ vektorn som representerar 1a raden i $\mathbf{A}$ är således

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -4 + (\Delta x)^2 & 2 - \Delta x & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

b) Index $j = 0$ svarar mot $(0, t)$ och där gäller randvillkoret $u_x(0, t) = 0$, vilket vi approximerar som

$$\frac{-w_2(t) + 4w_1(t) - 3w_0(t)}{2\Delta x} = 0.$$

Från detta så får vi

$$w_0(t) := \frac{4}{3}w_1(t) - \frac{1}{3}w_2(t).$$

Vi sätter in i $(\circ\circ)$

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{dt}(t) &= \frac{(2 + \Delta x)(\frac{4}{3}w_1(t) - \frac{1}{3}w_2(t)) + (-4 + (\Delta x)^2)w_1(t) + (2 - \Delta x)w_2(t)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\Delta x + (\Delta x)^2)w_1(t) + (\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\Delta x)w_2(t)}{\Delta x^2}\end{aligned}$$

$N - 1$ vektorn som representerar 1a raden i $\mathbf{A}$ blir i detta fall

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\Delta x + (\Delta x)^2 & \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\Delta x & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Lösning:

c) Välj en A-stabil metod (ovillkorligt stabil metod) exempelvis Euler bakåt eller implicita mittpunktsmetoden. Används någon av dessa för tidsstegningen har man en metod som är numeriskt stabil för alla val av tidssteg $\Delta t > 0$.

Med bakåt Euler applicerad på $(\ddagger)$ med $\vec{b} = 0$ fås

$$\frac{\vec{w}^{n+1} - \vec{w}^n}{\Delta t} = \mathbf{A}\vec{w}^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

och med implicita mittpunktsmetoden

$$\frac{\vec{w}^{n+1} - \vec{w}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mathbf{A}(\vec{w}^{n+1} + \vec{w}^n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Anm: Implicita mittpunktsmetoden har noggrannhetsordning 2, vilket är bättre än Euler bakåt som har noggrannhetsordning 1.