

Tentamen i SE1055 Hållfasthetslära grundkurs med energimetoder 2021-08-27 08:00 – 13:00

Hjälpmedel: Skrivhjälpmedel inklusive linjal, Formelsamling i hållfasthetslära, matematisk handbok, TeFyMa och räknedosa.

Kursansvarig och jourhavande lärare: Erik Olsson, 073-033 04 25, erolsson@kth.se

Examinator: Per-Lennart Larsson, 0455-42238, plla@kth.se

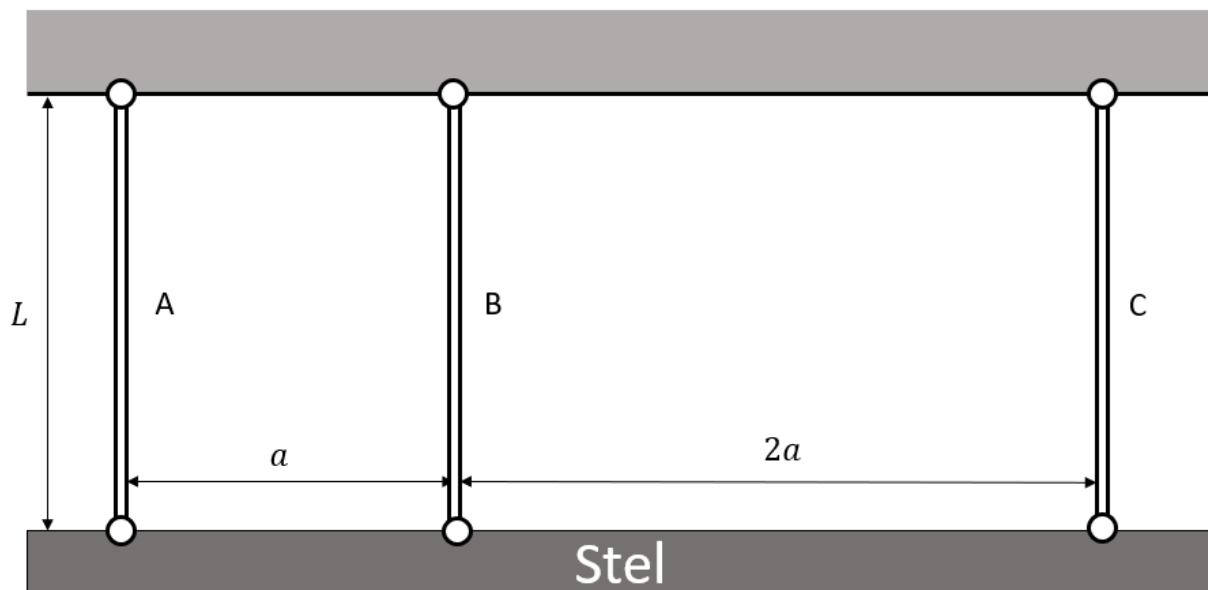
Betygsgränser: F: 0-11; Fx: 12-13; E: 14-17; D: 18-21; C: 22-24; B: 25-28; A: 29-40

Resultatet presenteras senast den 17:e september

Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad och spara originalen tills resultatet är rapporterat

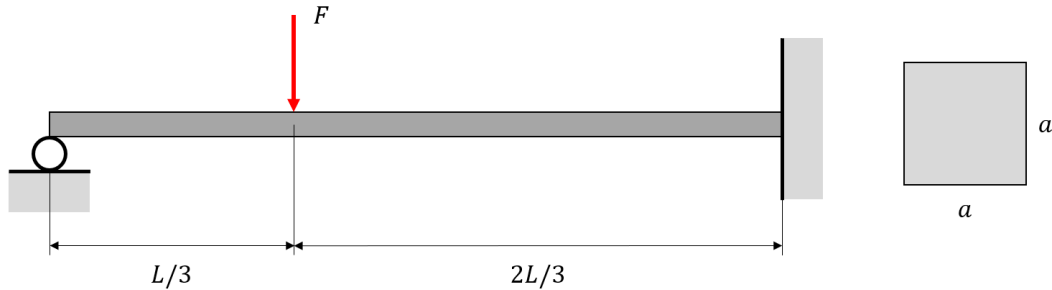
Problem 1 (6 poäng)

En stel bom med försumbar massa sitter upphängd i tre stänger, A, B, och C, bestående av ett linjärt termoelastiskt material med elasticitetsmodul E och temperaturutvidgningskoefficient α . Stängerna har en längd L och en tvärsnittsarea A . **Bestäm spänningarna i de tre stängerna om stång C värms upp en temperatur ΔT .**



Problem 2 (6 poäng)

En L lång balk av ett linjärelastiskt material (Elasticitetsmodul E) ligger fritt upplagd på ett stöd vid dess vänstra ände och sitter fast inspänd i en vägg vid dess högra ände. Balken har ett kvadratisk tvärsnitt med sidlängd a . En sträcka $L/3$ in från vänster belastas balken med en punktkraft F . **Bestäm största förekommande normalspänning i balken.**



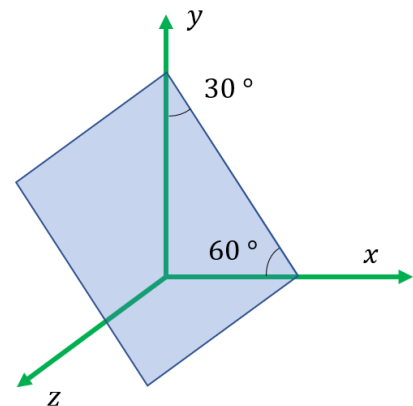
Problem 3 (6 poäng)

En FEM-simulering har gett följande spänningstillstånd:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 400 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} &= 200 \text{ MPa} \\ \sigma_{zz} &= -200 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= 100 \text{ MPa} \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

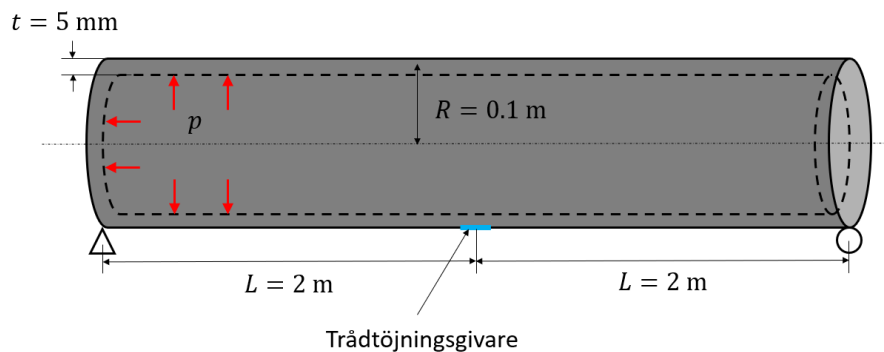
Bestäm:

- Värdet på den största och minsta huvudspänningen
- Normalspänningen ut från det plan som ligger längs z -axeln och som bildar vinkeln 60° mot x -axeln enligt figuren till höger samt den största skjuvspänningen som verkar längs med detta plan



Problem 4 (6 poäng)

Ett 4 meter långt tryckkärl av stål ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) som kan antas vara tunnväggigt ligger fritt upplagt på två stöd vid dess ändar. Förutom det inre övertrycket p så belastas tryckkärlet av sin egentyngd vilken kan modelleras som en jämnt fördelad last nedåt som totalt blir $Q = 962,5 \text{ N}$. Det inre övertrycket mäts genom att töjningen i kärlets längdriktning mäts mitt på undersidan av kärlet enligt figur. **Bestäm det inre övertrycket p om töjningsgivaren visar en töjning på 0.004% .**



Problem 5 (6 poäng)

En stor hålad plåt av stål, hålradien $R = 10 \text{ mm}$, belastas med en cyklisk enaxlig spänning $\sigma(t) = 100 \text{ MPa} + 50 \text{ MPa} \sin(\omega t)$ enligt figuren till höger. Vid kanten av hålet finns defekter som kan modelleras som 1 mm långa sprickor som växer symmetriskt ut från hålet.

Bestäm hur många belastningscykler plåten klarar till slutbrott om stålet har en brottseghet på $40 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ och spricktillväxten kan skrivas med Paris lag enligt

$$\frac{da}{dN} = 51.2 \cdot 10^{-12} \left(\frac{\Delta K_I}{1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}} \right)^{2.26}.$$

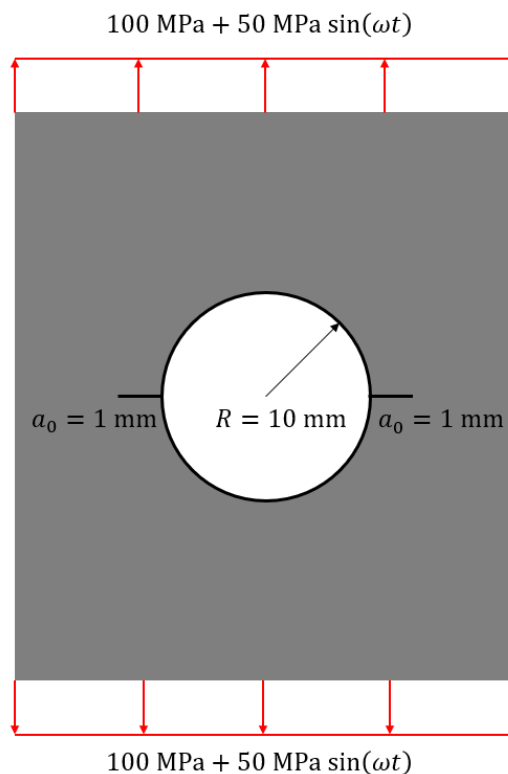
Ledning: Antag linjär brottmekanik där så behövs (*) och spänningsintensitetsfaktorn för detta belastningsfall för relevanta sprickängder kan skrivas som

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_5 \left(\frac{a}{R} \right)$$

med

$$f_5 \left(\frac{a}{R} \right) = 1.45 \left(\frac{a}{R} \right)^{-0.32}$$

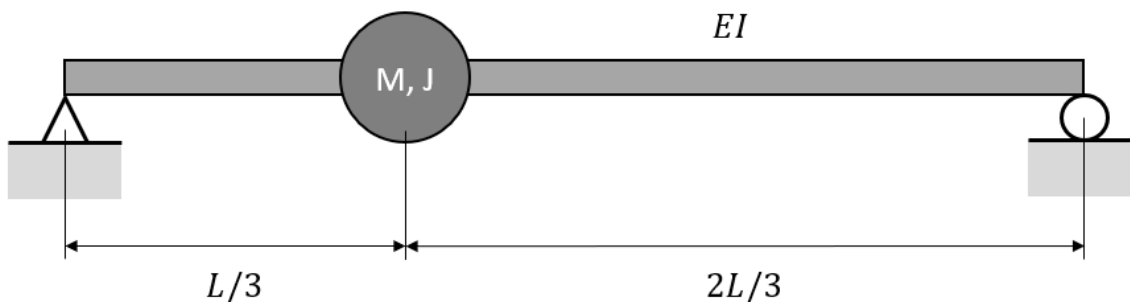
vilket ger ett lättare uttryck för handräkningar än f_5 i formelsamlingen



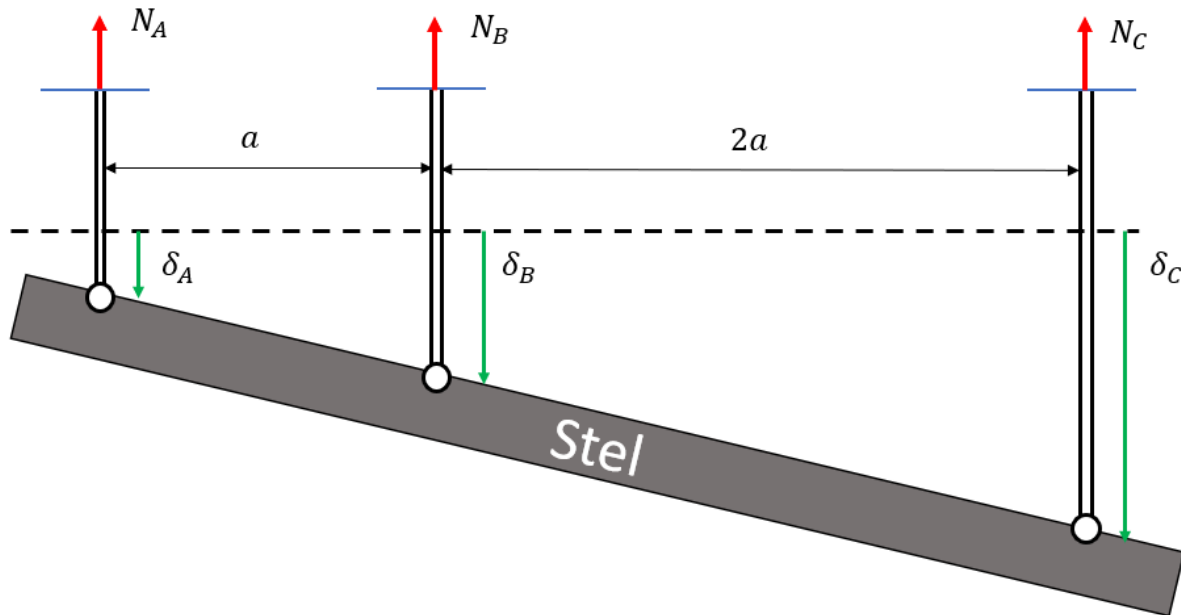
(*) Kursansvarig har en doktorand på materialvetenskap som arbetar på samma problem, han får inte anta linjär brottmekanik...

Problem 6 (6 poäng)

En L lång linjärelastisk masslös balk med böjstyvhet EI ligger fritt upplagd på två stöd. En sträcka $L/3$ in från stödet sitter en cirkulär skiva med massa M och rotationströghetsmoment $J = ML^2/200$. **Bestäm systemets två egenfrekvenser för svängningar i papprets plan.**



Problem 1



Kratjämvikt ger

$$N_A + N_B + N_C = 0 \quad (1)$$

Samt momentjämvikt runt stång A's infästningspunkt

$$N_B a + N_C 3a = 0 \quad N_B = -3N_C \quad (2)$$

Insatt i (1) ger

$$N_A - 3N_C + N_C = 0 \quad N_A = 2N_C \quad (3)$$

Problemet är statiskt obestämt, deformationssamband behövs. Likformiga trianglar ger

$$\frac{\delta_B - \delta_A}{a} = \frac{\delta_C - \delta_A}{3a} \quad \delta_B = \frac{\delta_C}{3} + \frac{2\delta_A}{3} \quad (4)$$

Stång A och B utsätts endast för elastiska töjningar

$$\delta_A = \frac{N_A L}{EA} \quad \delta_B = \frac{N_B L}{EA} \quad (5)$$

Stång C utsätts för både elastiska och termiska töjningar

$$\varepsilon_C = \frac{\sigma_C}{E} + \alpha \Delta T \quad (6)$$

Eller

$$\delta_C = \frac{N_C L}{EA} + \alpha \Delta T L \quad (7)$$

Insatt i deformationssambandet

$$\frac{N_B L}{EA} = \frac{N_C L}{3EA} + \frac{\alpha \Delta T L}{3} + \frac{2N_A L}{3EA} \quad (8)$$

Eller

$$3N_B = N_C + 2N_A + EA\alpha\Delta T \quad (9)$$

Användning av jämviktssambanden

$$-9N_C = N_C + 4N_C + EA\alpha\Delta T \quad N_C = -\frac{EA\alpha\Delta T}{14} \quad (10)$$

Vilket ger spänningarna

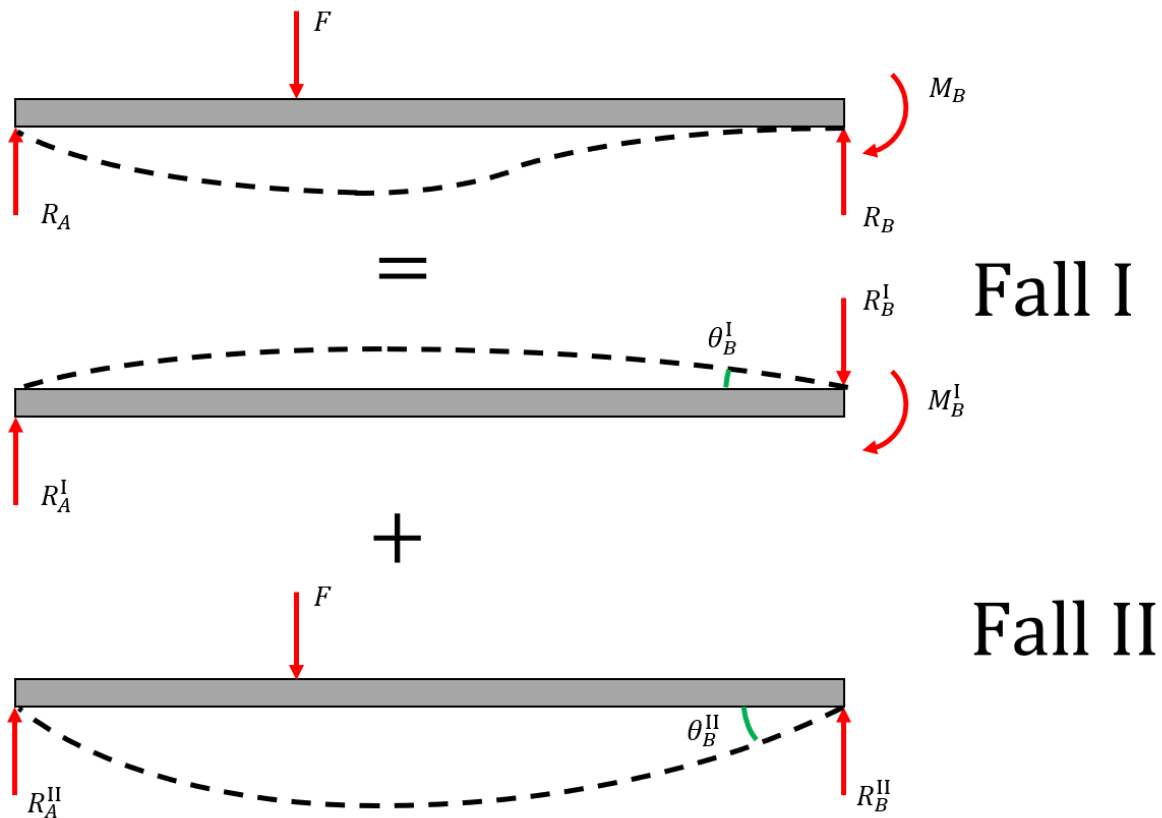
$$\sigma_A = -\frac{2EA\alpha\Delta T}{14} \quad (11)$$

$$\sigma_B = \frac{3EA\alpha\Delta T}{14}$$

$$\sigma_C = -\frac{EA\alpha\Delta T}{14}$$

Problem 2

Problemet är statiskt obestämt och kan exempelvis delas upp i dessa två elementarfall som finns i formelsamlingen, Fall I är elementarfall 5 för fritt upplagd balk med momentet vid balkens vänstra ände satt till 0 och Fall II är elementarfall 1 för fritt upplagd balk. Superponera dessa med villkoret att $\theta_B^I - \theta_B^{II} = 0$. Reaktionskrafterna ges av $R_A = R_A^I + R_A^{II}$ samt $R_B = R_B^I - R_B^{II}$



Börjar med Fall 1:

$$\theta_B^I = \frac{M_B^I L}{3EI} \quad (12)$$

Samt

$$R_A^I = R_B^I = -M_B^I/L \quad (13)$$

Fall 2 med $\alpha = 1/3, \beta = 2/3$:

$$R_A^{II} = \frac{2F}{3} \quad R_B^{II} = \frac{F}{3} \quad (14)$$

$$\theta_B^{II} = \frac{FL^2}{6EI} \frac{1}{3} \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{8FL^2}{162EI} = \frac{4FL^2}{81EI} \quad (15)$$

Bestämmer M_B^I

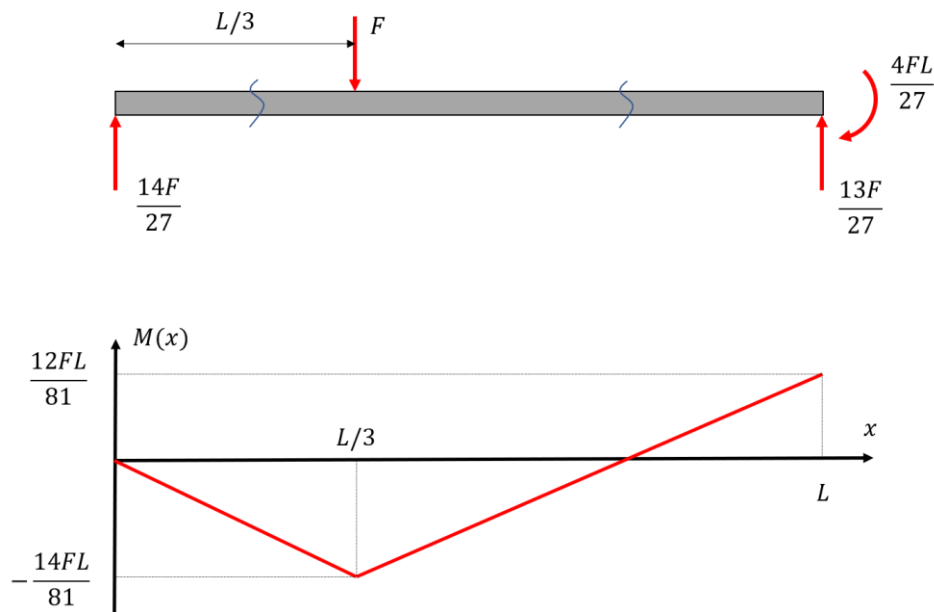
$$\frac{M_B^I L}{3EI} = \frac{4FL^2}{81EI} \quad M_B^I = \frac{4FL}{27} \quad (16)$$

Reaktionskrafterna

$$R_A = \frac{2F}{3} - \frac{4F}{27} = \frac{14F}{27} \quad (17)$$

$$R_B = \frac{F}{3} - -\frac{4F}{27} = \frac{13F}{27} \quad (18)$$

Snitta och bestäm böjmomentet som funktion av x



Det till beloppet största momentet i balken är $M_{max} = 14FL/81$, största normalspänning ges därför av

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_b} = \frac{\frac{14FL}{81}}{\frac{a^3}{6}} = \frac{28FL}{27a^3} \quad (19)$$

Problem 3

Spänningsmatrisen blir

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 400 & 100 & 0 \\ 100 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & -200 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (20)$$

Huvudspänningar

$$\det \mathbf{S} - \sigma \mathbf{I} = 0 \quad (21)$$

Eller

$$[(400 - \sigma)(200 - \sigma) - 100^2](-200 - \sigma) = 0 \quad (22)$$

En huvudspänning är uppenbarligen -200 MPa, de andra ges av $(400 - \sigma)(200 - \sigma) - 100^2 = 0$ eller $\sigma^2 - 600\sigma + 70000 = 0$

Med lösning

$$\sigma = 300 \pm \sqrt{300^2 - 70000} = 300 \pm 141 \text{ MPa} \quad (23)$$

Största huvudspänning är alltså 441 MPa och minsta huvudspänning -200 MPa

Normalen till det angivna planet $\hat{\mathbf{n}} = [\sqrt{3}/2, 1/2, 0]^T$, spänningsvektorn på planet $\mathbf{s} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{n}}$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 400 & 100 & 0 \\ 100 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 396,4 \\ 186,6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (24)$$

Normalspänningen $\sigma = \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 436,6$ MPa

Största skjuvspänning på planet med normal $\hat{\mathbf{n}}$

$$\tau = \sqrt{|\mathbf{s}|^2 - \sigma^2} = 36,5 \text{ MPa} \quad (25)$$

Problem 4

Spänningarna pga det inre övertrycket ges av ångpanneformlerna

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{t}, \quad \sigma_{zz} = \frac{pR}{2t}, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = \tau_{z\varphi} = 0 \quad (26)$$

Egentyngden ger upphov till böjspänningar i z-led med maximum på undersidan där givaren sitter.

Böjspänningarna beräknas från det maximala böjmomentet som uppkommer på mitten av tryckkärlet vilket ges exempelvis av snittning + jämvikt

$$|M_{max}| = \frac{QL}{4} \quad (27)$$

Böjspänningarna som uppkommer

$$\sigma_b = \frac{M_{max}}{W_b} = \frac{QL}{4\pi R^2 t} \quad (28)$$

Det sammansatta spänningstillståndet blir då

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (29)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{t}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{pR}{2t} + \frac{QL}{4\pi R^2 t}$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = \tau_{z\varphi} = 0$$

Töjningen i z – led (vilken är den som mäts) ges av Hookes generaliserade lag

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] = \frac{1}{E} \left[\frac{QL}{4\pi R^2 t} + \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \frac{pR}{t} \right] \quad (30)$$

Löser ut det inre övertrycket p

$$p = \frac{\left[\varepsilon_{zz} E - \frac{QL}{4\pi R^2 t} \right] t}{\frac{1}{2} - \nu} R = 1.23 \text{ MPa} \quad (31)$$

Problem 5

Börja med att bestämma kritisk spricklängd a_c . Brott då $K_{I\max} = K_{IC}$

$$K_{I\max} = \sigma_{\max} \sqrt{\pi a} f_5(a) = 40 \text{ MPa} \sqrt{m} \quad (32)$$

Max spänning under lastcykeln är 150 MPa, alltså

$$40 \text{ MPa} \sqrt{m} = 150 \text{ MPa} \sqrt{\pi} a_c^{0.5} 1.45 \left(\frac{a_c}{R} \right)^{-0.32} \quad (33)$$

Eller

$$a^{0.18} = \frac{40 \text{ MPa} \sqrt{m} R^{-0.32}}{150 \text{ MPa} \sqrt{\pi} 1.45} \rightarrow a_c \approx 12.3 \text{ mm} \quad (34)$$

Spricktillväxt

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_I)^n \quad (35)$$

med

$$\Delta K_I = \Delta \sigma \sqrt{\pi a} f_5(a) = \frac{100 \text{ MPa} \sqrt{\pi}}{R^{-0.32}} 1.45 a^{0.18} \quad (36)$$

Alltså

$$\frac{da}{dN} = C \left(1.45 \frac{100 \text{ MPa} \sqrt{\pi}}{R^{-0.32}} \right)^{2.26} (a^{0.18})^{2.26} \quad (37)$$

Eller

$$\frac{da}{a^{0.4068}} = C \left(1.45 \frac{100 \text{ MPa} \sqrt{\pi}}{R^{-0.32}} \right)^{2.26} dN \quad (38)$$

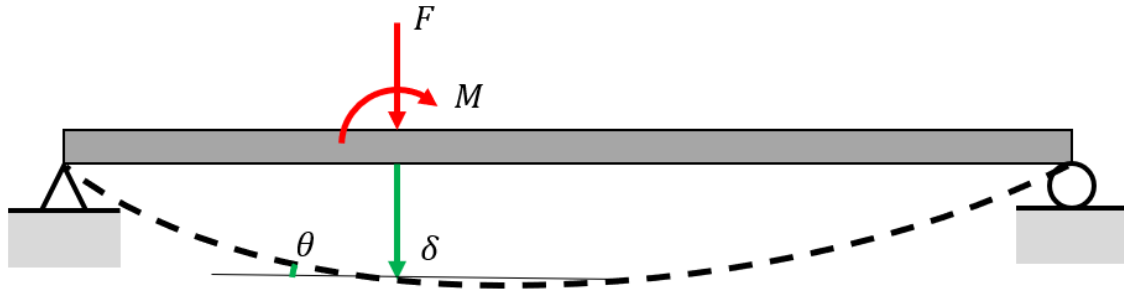
Eller

$$\int_{a_0}^{a_c} a^{-0.4068} da = C \left(1.45 \frac{100 \text{ MPa} \sqrt{\pi}}{R^{-0.32}} \right)^{2.26} N_c \quad (39)$$

Alltså

$$N_C = \frac{(a_c^{-0.4068+1} - a_0^{-0.4068+1})}{(1-0.4068) \left(1.45 \frac{100 \text{ MPa} \sqrt{\pi}}{R^{-0.32}} \right)^{2.26} C} \approx 188\,000 \text{ cykler} \quad (40)$$

Problem 6



Använd flexibilitetsform

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha_{11}P + \alpha_{12}M \\ \theta &= \alpha_{21}P + \alpha_{22}M \end{aligned} \quad (41)$$

och bestäm koefficienterna α_{11} , α_{12} , α_{21} och α_{22} där $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

Använd elementarfall 1 och 2 för fritt upplagd balk. Bestäm α_{11} via elementarfall 1 för fritt upplagd balk med $\alpha = 1/3$ och $\beta = 2/3$.

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{PL^3}{3EI} \frac{1}{9} \frac{4}{9} = \frac{4PL^3}{243EI} \rightarrow \alpha_{11} = \frac{4L^3}{243EI} \quad (42)$$

Bestäm α_{21} via elementarfall 2 för fritt upplagd balk, även här med $\alpha = 1/3$ och $\beta = 2/3$. Notera minustecknet då utböjningen är definierad tvärt om i formelsamlingen mot figuren ovan

$$\delta = -\frac{Ml^2}{3EI} \frac{1}{3} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2ML^2}{81EI} \rightarrow \alpha_{11} = \frac{2L^2}{81EI} = \frac{6L^2}{243EI} \quad (43)$$

Bestäm α_{22} via samma elementarfall

$$\theta = \frac{ML}{3EI} \left(1 - 3 \frac{1}{3} \frac{2}{3} \right) = \frac{ML}{9EI} \quad \alpha_{22} = \frac{L}{9EI} = \frac{27L}{243EI} \quad (44)$$

På grund av symmetrin $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ har vi bestämt alla koefficienter men för säkerhets skull kan vi bestämma α_{12} från elementarfall 1 vilket kräver ett steg till än de andra beräkningarna då θ inte är explicit given men går att bestämma från att derivera utböjningen

$$\theta = \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{l} \frac{d\delta}{d\xi} = \frac{Pl^2}{6EI} \beta [(1 - \beta^2) - 3\xi^2] \quad (45)$$

Sätt in $\beta = 2/3$ samt $\xi = 1/3$

$$\theta = \frac{PL^2}{6EI} \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \frac{PL^2}{6EI} \frac{2}{3} \left[1 - \frac{4}{9} - \frac{3}{9} \right] = \frac{4PL^2}{2 \cdot 81EI} = \frac{6L^2}{243EI} \quad (46)$$

Beräkning av egenfrekvenserna

$$\frac{2}{\omega_{1,2}^2} = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 \pm \sqrt{(\alpha_{11}m_1 - \alpha_{22}m_2)^2 + 4\alpha_{12}^2m_1m_2} \quad (47)$$

Med $m_1 = M$ och $m_2 = ML^2/200$ fås

$$\frac{2}{\omega_{1,2}^2} = \frac{ML^3}{243EI} \left[4 + \frac{27}{200} \pm \sqrt{\left(4 - \frac{27}{200}\right)^2 + 4 \cdot \frac{36}{200}} \right] = \frac{ML^3}{243EI} [4.135 \pm 3.96] \quad (48)$$

Alltså

$$\omega_1 = 7.75 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad \omega_2 = 52.7 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad (49)$$