



SF1673 Analys i en variabel
Tentamen
Torsdag den 22 december 2021

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av åtta uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt sex poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II	18	Avancerade problem	0	0	4	8	11	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Definera vad som menas med att $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är växande. (1 p)
(b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} ce^x - 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2 + d & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

- För vilka c och d är f kontinuerlig i $[-1, 1]$? (2 p)
(c) Låt $c = d = 1$. Är sådant f växande i $[-1, 1]$? (1 p)

2. (a) Definera vad som menas med att a är en inflexionspunkt till funktion $g(x)$. (1 p)
(b) Låt $g(x) = e^{\sin x}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Undersök på vilka intervall $g(x)$ är konvex resp. konkav. Ange också eventuella inflexionspunkter. (3 p)

3. (a) Definera vad som menas med Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ av funktion $f(x)$. (1 p)
(b) Bestäm Maclaurinpolynomet $p_3(x)$ av funktion $f(x) = \ln(1 + 2x)$. (1,5 p)

- (c) Använd Maclaurinutvecklingar för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{\sin(x^2)}.$$

(1,5 p)

4. (a) Om f är kontinuerlig funktion på intervallet $[a, \infty)$, vad menas med att integralen $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergerar? (1 p)

- (b) Konvergerar eller divergerar den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^2+2}}?$$

(1,5 p)

- (c) Konvergerar eller divergerar den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx?$$

(1,5 p)

5. Bestäm den funktionskurva $y = f(x)$ som går genom punkten $(4, 6)$ och har följande egenskap: kurvans tangent i en godtycklig punkt $(a, f(a))$ skär x axeln i punkten $(-a, 0)$. (4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Formulera och bevisa Analysens huvudsats. (4 p)
(b) Bestäm alla kontinuerliga funktioner y sådana att

$$y(x) = -2 + \int_0^x y(t) \cos(2t) dt.$$

(2 p)

7. (a) Bevisa följande satsen:

Låt f vara kontinuerlig funktion. Om $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L > 0$, det finns $\delta > 0$ sådant att $|f(x)| \leq 2L|x|$ för alla $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. (2 p)

- (b) Funktion f definieras för alla reella tal av

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{t}{n} + \cos \frac{2t}{n} + \cdots + \cos \frac{nt}{n} \right).$$

Bevisa att f är en kontinuerlig funktion.

(4 p)

8. (a) Bevisa att om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och $f'(x) > 0$ på (a, b) så är f strängt växande på $[a, b]$. (4 p)

- (b) Visa med exempel att ingen av de två förutsättningarna i satsen i del (a) kan strykas. (2 p)
-