

Tentamen för SH1014 Modern fysik

⇒ Lösningsskiss: med (nästan kompletta) lösningsförslag!!

2025-01-07, 14:00–19:00, KTH, Stockholm

Examinator/lärare: Christian Ohm (070-091 91 05), Pär Olsson (073-765 05 38)

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare, bifogat formelblad

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng enligt följande:

Betyg A:	36-40 points
B:	32-35.5 poäng
C:	28-31.5 poäng
D:	24-27.5 poäng
E:	20-23.5 poäng
Fx:	18-19.5 poäng
F:	0-17.5 poäng

Motivera dina svar tydligt med uträkningar, text, och figurer när det är lämpligt. Skriv tydligt och tänk på att svara med ett rimligt antal värdesiffror. Gör dina egna, rimliga, uppskattningar när det behövs. Det ska framgå tydligt från din lösning vilka antaganden och uppskattningar du gjort.

Lycka till! / Christian & Pär

Uppgift 1

God fortsättning på 2025 – året som Förenta Nationerna har deklarerat som ”International Year of Quantum Science and Technology” eftersom det nu är 100 år sedan Heisenberg, Born, Schrödinger och Dirac gjorde stora framsteg med att formulera kvantmekaniken. Men detta föregicks sedan 1900-talets början av flera upptäckter av fenomen som visade att naturen på liten skala är kvantiserad, bland annat den fotoelektriska effekten och svartkroppsstrålning.

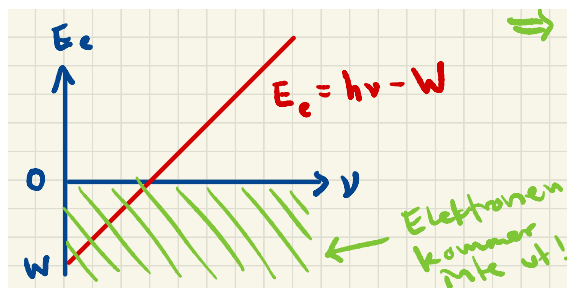
- (a) Skriv ner formeln för den fotoelektriska effekten, definiera alla storheter, rita ett enkelt diagram för den frigjorda elektronens rörelseenergi som funktion av frekvens, och markera vad som händer i olika regioner av diagrammet. [2p]
- (b) Ett närbesläktat fenomen är den *fotovoltaiska effekten* som utnyttjas i solceller. Här kickas inte elektronen ut ur halvledarmaterialet, utan exciteras från valensbandet till ledningsbandet. Stora framsteg har gjorts med att utveckla solceller av halvledare med så kallad perovskitstruktur, som effektivt kan omvandla solljus till elektrisk energi, och det har i början på oktober under flera år ryktats om att tekniken kanske kan komma att belönas med Nobelpris. Dessa material har typiskt ett bandgap på ca 1.5 eV. Vilken våglängd krävs för att en foton ska kunna aktivera halvledaren och generera en ström? [1p]
- (c) Precis utanför ditt fönster står en lyktstolpe med stark belysning och lyser under dygnets mörka timmar, och den är så nära att du till och med kan se att den är märkt med “2700 K”, dvs dess sken är likt det från en svartkropp med denna temperatur. I sann studententreprenörsanda tänker du att här finns resurser att spara om du kan bygga en billig solcell som kan konvertera detta ljus till elenergi. Vilken våglängd bör du optimera solcellen för? [2p]

⇒ Lösningsskiss:

(a) Formeln för den fotoelektriska effekten är

$$E_k = h\nu - W$$

där E_k är den frigjorda elektronens kinetiska energi, h är Plancks konstant, ν är den inkommande fotonens frekvens, och W är utträdesarbetet som krävs för att frigöra elektronen från en atom. På föreläsning 4 ritades följande enkla figur upp:



- (b) En fotonens energi och vårlängd är kopplade genom $E = h\nu = hc/\lambda \Rightarrow \lambda = hc/E$, vilket ger $\lambda \approx 8.3 \times 10^{-7} \text{ m} = 830 \text{ nm}$.
- (c) Här kan vi använda Wiens förskjutningslag för att räkna ut vid vilken våglängd intensiteten är som störst för en svartkropp med temperaturen $T = 2700 \text{ K}$:

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} [\text{m} \cdot \text{K}]}{T [\text{K}]} \approx 1073 \text{ nm} \approx 1100 \text{ nm}$$

Vanliga fel:

- Läs uppgiften noga – om det efterfrågade diagrammet saknades gjordes avdrag, och det var förvånansvärt många som inte hade med detta, även om formeln var rätt.
- Antal värdesiffror: inga stora avdrag gavs för detta, men kom ihåg att alltid tänka på värdesiffror i era svar. På b)-uppgiften angavs energin med två värdesiffror, så det är orimligt att ange en våglängd med fem.

Uppgift 2

Schrödingers genombrott kom från ansatsen att varje dynamiskt system existerar en vågfunktion Ψ som innehåller all information om systemet. En partikel med massa m och energi E rör sig längs x -axeln, där potentialen ges av

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < L \\ U_0, & x \geq L. \end{cases}$$

Under förutsättning att $E < U_0$, bestäm partikelns vågfunktion fullständigt. [5p]
 $\Rightarrow$ Lösningsskiss: Vi definierar regionerna I, II, III , som bestäms av värdet på potentialen, i samma ordning som givna i uppgiften. Vi kan skriva vågfunktionen som $\psi = \psi_I + \psi_{II} + \psi_{III}$.

- I region I måste $\psi_I(x) = 0$ eftersom oändlig energi skulle krävas för att ha en nollskild vågfunktion där potentialen är oändlig.
- I region II kan vi på vanligt sätt ansätta $\psi_{II}(x) = A \sin kx + B \cos kx$, där $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.
- I region III inser vi att trots att $E > U_0$ kan vågfunktionen penetrera regionen, men dämpas kraftigt. Vi ansätter $\psi_{III}(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$, där $\alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$

Vågfunktionen måste vara normerbar, vilket kräver att $C = 0$ (för att undvika att $\psi \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$). Den behöver dessutom vara kontinuerlig, dvs

$$\psi_{II}(L) = \psi_{III}(L) \Rightarrow A \sin kL = De^{-\alpha L}$$

och vi får kvar det slutliga normeringskravet

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx &= \int_0^L A^2 \sin^2 kx dx + \int_L^{\infty} D^2 e^{-2\alpha x} dx = 1 \\ &\Rightarrow \frac{A^2}{2} \left(L - \frac{\sin 2kL}{2k} \right) - \frac{D^2}{2\alpha} e^{-2\alpha L} = 1 \end{aligned}$$

och vi kan lösa ut A och D :

$$A = \sqrt{\frac{2}{L - \frac{\sin 2kL}{2k} - \frac{\sin^2 kL}{\alpha}}} \quad (1)$$

$$D = \frac{\sqrt{2} e^{\alpha L} \sin kL}{\sqrt{L - \frac{\sin 2kL}{2k} - \frac{\sin^2 kL}{\alpha}}}. \quad (2)$$

Vi kan nu uttrycka den kompletta vågfunktionen mha dessa konstanter:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A \sin kx, & 0 \leq x < L \\ De^{-\alpha x}, & x \geq L. \end{cases}$$

Vanliga fel:

- Ansätter lösningarna för de stationära tillstånden för en oändlig potential-brunn – kom ihåg att vågfunktionen kan penetrera en potential som motsvarar en högre energi än partikelns.
- Glömt att utnyttja alla randvillkoren – de ges av kontinuitet av vågfunktionen, och dess derivata (förutom vid oändlig potentialbarriär, som inte kan förekomma i naturen), och normeringskravet.

Uppgift 3

Hannes Alfvén är KTH:s enda Nobelpristagare hittills, och tilldelades fysikpriset år 1970 för *“grundläggande bidrag och upptäckter inom magnetohydrodynamiken med fruktbärande tillämpningar inom olika delar av plasmafysiken”*. Forskare på Alfvénlaboratoriet på KTH försöker idag utveckla en fusionsreaktor, där deuterium (^2H) och tritium (^3H) kan slås ihop i ett 150 miljoner grader varmt plasma för att utvinna kärnenergi genom processen $^2\text{H} + ^3\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + n$.

- (a) Låt oss anta att forskarna på Alfvénlabb redan var klara med sin reaktor och att den just nu kör för fullt. Precis som väte har deuterium och tritium kortlivade exciterade tillstånd, och även om det är osannolikt i plasman tänker vi att ett sådant tritiumtillstånd uppstår i reaktorn, med livstiden 1.6 ns. De starka magnetfälten som innesluter plasman kan ge upphov till så kallade runaway-elektroner med hög energi. En sådan elektron med $E = 20$ MeV swishar förbi precis när tritiumatomen exciteras. Hur lång livstid har tillståndet enligt en observatör i elektronens inertialram? Även om plasman är mycket het rör sig atomerna inte tillräckligt snabbt i reaktorn för att ge upphov till märkbara relativistiska effekter, så vi kan försumma deras hastighet. [3p]
- (b) Alfvén har inte bara fått ett labb uppkallat efter sig, utan även en asteroid i det stora asteroidbältet i vårt solsystem, *Alfvén 1778*. Enligt mätningar har den en diameter på ca 20 km, och enligt gängse praxis antar vi att den är sfärisk¹. Enligt en databas från Jet Propulsion Lab vid Caltech befinner den sig just idag, den 7 januari 2025, 2.592 au från jorden (längdenheten “astronomisk enhet”, au, definierades tidigare som avståndet mellan solen och jorden, och är cirka 1.5×10^{11} m). Vi antar nu (högst osannolikt) att en runaway-elektron tar sig ut genom reaktorväggen, ut genom atmosfären och fortfarande har $E_k = 5$ MeV när den kommer ut i rymden där den kan färdas obehindrat rakt mot *Alfvén 1778*. Hur lång skulle elektronen uppfatta att *Alfvén 1778* är i elektronens färdriktning när den åker förbi precis bredvid? Asteroidens hastighet är ca 20 km/s. [2p]

⇒ Lösningsskiss: Obs! I a) kan E tolkas antingen som den totala energin, eller den kinetiska, så länge det är tydligt vad som antas. I b) är det dock specat att det är E_k som avses.

- (a) Vi antar att den givna energin är den kinetiska energin. Vi kan få runaway-elektronens Lorentzfaktor från sambandet $E = E_k + E_0 = \gamma m_0 c^2 \Rightarrow$, där vilomassan $E_0 = m_0 c^2$, så vi får

$$E_k = (\gamma - 1)m_0 c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E_k + m_0 c^2}{m_0 c^2} \approx 40.14 \approx 40.$$

¹Om du inte känner till begreppet sedan tidigare, googla “spherical cow approximation” när du varvar ner efter tentan – det verkar härstamma från tiden då Alfvén var verksam.

Uppgiftsbeskrivningen kan tolkas som att vi kan försumma hastigheten på tritiumatomen relativt reaktorn. En observatör i vila i runaway-elektronens inertialram ser det som att tritiumatomen kommer farandes mot den med hög hastighet, och uppmäter då att det exciterade tritiumtillståndet upplevs som längre än för tritiumatomen själv, pga tidsdilatation:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{E_k + m_0 c^2}{m_0 c^2} \times 1.6 \times 10^{-9} \text{ s} \approx 6.4 \times 10^8 \text{ s} = 64 \text{ ns}$$

(Om den givna energin i stället antas vara den totala blir $\gamma = E/E_0 \approx 39.14$, vilket enligt elektronen i stället ger en livstid för tritiumtillståndet på 63 ns.)

Vanligt fel: division i stället för multiplikation med γ -faktorn. Minnesregel: kom ihåg att den kortaste tiden alltid upplevs av observatören där de två händelserna (excitation och deexcitation, i detta fall) sker på samma position, dvs i positronens egna inertialram.

- (b) Den relativistiska effekten längdkontraktion gör att elektronen som flyger förbi asteroiden upplever den som mindre i elektronens egen färdriktning. Vi får Lorentzfaktorn på samma sätt som ovan, men nu är $E_k = 5 \text{ MeV}$ (det står att den kan färdas fritt i rymden, så ingen energi förloras på vägen till Alfvén):

$$\gamma = \frac{E_k + m_0 c^2}{m_0 c^2} \approx 10.78$$

Eftersom $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ kan vi lösa ut $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0.9957$, dvs elektronen färdas i över 99% av ljusets hastighet relativt jorden, och då blir asteroidens hastighet försumbar. Formeln för längdkontraktion ger nu längden på asteroiden i elektronens färdriktning som

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{20 \text{ km}}{10.78} \approx 1.854 \text{ km} \approx 2 \text{ km}.$$

Vanligt fel: fel storleksordning på svaret – en bra minnesregel är att storleksordningen på γ -faktorn är E/m , och det är med denna faktor som längden ska skalas. Även här är det bra att minnas att den *längsta* längden uppmäts av en observatör som är i vila i förhållande till objektet som mäts, alla andra mäter kortare längder.

Uppgift 4

Cirka 380000 år efter Big Bang hade energidensiteten sjunkit tillräckligt mycket för att elektronerna skulle kunna bindas till protoner och bilda väteatomer i sitt grundtillstånd.

- Vilken våglängd får en foton som skickas ut då en fri elektron binds till en proton i denna konfiguration? [1p]
- Med hjälp av väteatomens vågfunktioner i formelsamlingen, beräkna den mest sannolika radien för elektronen i tillståndet, uttryckt i a_0 . [2p]
- Beräkna sannolikheten att elektronen befinner sig innanför Bohr-radien a_0 . [2p]

⇒ Lösningsskiss:

- Energien för en elektron ges i formelsamlingen av $E_n = \frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{n^2}$, som för väteatomen i grundtillstånd ($Z = n = 1$) ger $E_1 = -13.6 \text{ eV}$. Våglängden för en foton som skickas ut när en fri elektron binds till detta tillstånd blir alltså

$$\lambda = \frac{hc}{E_1} \approx 9.12 \times 10^{-8} \text{ m} = 91.2 \text{ nm}.$$

Vanligt fel: försök att räkna ut energin via Q -värde från masskillnader.

- Elektronen i en väteatom beskrivs av $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = Y_l^{m_l}(\theta, \phi) \cdot R_{n,l}(r)$, där den första faktorn är vinkelberoende och den sista endast beror på radien (och båda är normaliserade var och en för sig). För grundtillståndet har vi huvudkvanttal $n = 1$, så bantantalet $l = 0, 1, \dots, n - 1$ måste vara 0, och det magnetiska kvanttalet $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm n - 1$ blir också 0. Enligt formelsamlingen har vi

$$\psi_{1,0,0} = Y_0^0 \cdot R_{1,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \frac{1}{a_0^{3/2}} 2e^{-r/a_0}.$$

Nu vill vi ha ett uttryck för sannolikheten att elektronen befinner sig vid radien r . Sannolikheten för att elektronen befinner sig i ett litet volymelement dV ges av $dP = |\psi|^2 dV$. Funktionen är sfäriskt symmetrisk, och vi är bara intresserade av det radiella beroendet, så använder att $dV = 4\pi r^2 dr$ (ökande radie spannar upp allt större yta):

$$P(r) = 4\pi r^2 |\psi_{1,0,0}|^2 = 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi} \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0}.$$

Låt oss hitta max genom att sätta derivatan map r till noll:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= \frac{4}{a_0^3} \left(2re^{-2r/a_0} - \frac{2}{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} \right) = 0 \\ \Rightarrow r - \frac{r^2}{a_0} &= 0 \Rightarrow r = a_0\end{aligned}$$

Den mest sannolika radien att hitta elektronen vid är Bohrradien a_0 .

Vanligt fel: Mest sannolika positionen ges av derivatan av $|\psi(x)|^2$, och *inte* av väntevärdet för positionen – dessa är två olika saker.

- (c) För att hitta sannolikheten att elektronen befinner sig *innanför* a_0 behöver vi beräkna

$$\int_0^{a_0} P(r) dr = \int_0^{a_0} \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} dr \equiv \frac{4}{a_0^3} I$$

Vi kan nu lösa integralen I (med viss möda, mha partiell integration $\times 2$):

$$I = \left[r^2 \frac{e^{-2r/a_0}}{(-2/a_0)} \right]_0^{a_0} - \int_0^{a_0} 2r \frac{e^{-2r/a_0}}{(-2/a_0)} dr = \dots \quad (3)$$

$$= -\frac{a_0}{2} \left[r^2 e^{-2r/a_0} \right]_0^{a_0} + a_0 \left[r \frac{e^{-2r/a_0}}{(-2/a_0)} \right]_0^{a_0} - a_0 \int_0^{a_0} \frac{e^{-2r/a_0}}{(-2/a_0)} dr \quad (4)$$

$$= \left[-\frac{a_0}{2} r^2 e^{-2r/a_0} - \frac{a_0^2}{2} r e^{-2r/a_0} - \frac{a_0^3}{4} e^{-2r/a_0} \right]_0^{a_0} \quad (5)$$

Med insatta värden fås

$$I = \frac{a_0^3}{2} \left(-e^{-2} - e^{-2} - \frac{e^{-2}}{2} - (-0 - 0 - \frac{1}{2}) \right) = \dots \quad (6)$$

$$= \frac{a_0^3}{4} \left(-\frac{5}{e^2} + 1 \right) \Rightarrow \quad (7)$$

$$\int_0^{a_0} P(r) dr = \frac{4}{a_0^3} I = \left(1 - \frac{5}{e^2} \right) \approx 0.323 \quad (8)$$

Så sannolikheten blir $1 - \frac{5}{e^2} \approx 0.32$.

Vanligt fel: kolla alltid att svaret är rimligt, här ska det vara mellan 0 och 1 eftersom det är en sannolikhet, och bör vara dimensionslöst (svar som har med a_0 i täljare eller nämnare är inte dimensionslösa eftersom a_0 är en längd).

Uppgift 5

Isotopen ^{225}Ac används i viss cancerbehandling eftersom den i normalfallet sänder ut α -strålning. I denna uppgift betraktar vi dock flera möjligheter som ^{225}Ac skulle kunna sönderfalla på.

- Beskriv schematiskt hur β^+ -sönderfall, β^- -sönderfall, och α -sönderfall går till i fallet med moderkärnan ^{225}Ac genom att ange vilka partiklar som sänds ut och visa vilken dotterkärna som bildas i var och ett av de tre fallen [3p]
- Räkna ut Q -värdena för de tre sönderfallen och förklara med hjälp av dessa varför ^{225}Ac i huvudsak sänder ut α -partiklar [2p]

Obs! Se separat blad med atommassor efter formelsamlingen.

⇒ Lösningsskiss: **TODO: Lösning här**

Uppgift 6

En av metallerna i jordskorpan med högst atomtal är uran ($Z = 92$). I huvudsak så består uran av ^{235}U ($t_{1/2} = 7.04 \times 10^8$ år) och ^{238}U ($t_{1/2} = 4.46 \times 10^9$ år). Dessa två nuklider kan anses sönderfalla helt oberoende av varandra. Idag (år 2025) så är andelen U-235 av allt uran 0.72%, och andelen U-238 är 99.27%. Jordens ålder är 4.54 miljarder år. Beräkna isotopförhållandet (antalet atomer), dvs $N(^{238}\text{U})/N(^{235}\text{U})$ vid Jordens födelse. [5p]

⇒ Lösningsskiss: Obs! Ett tryckfel hade smugit sig in i lydelsen som frågade efter $N(^{235}\text{U})/N(^{235}\text{U})$, vilket vore lite väl trivialt. Som klargjordes i tentasalarna är det givetvis $N(^{238}\text{U})/N(^{235}\text{U})$ som avses, dvs förhållandet mellan de två uranisotoperna som uppgiften.

TODO: Lösning här.

Uppgift 7

Spektrallinjer från den diatomära molekylen CH observerades för 30 år sen från nebulosan NGC7027. Man fann en serie rotationsövergångar. Övergången motsvarande $J = 3 \rightarrow J = 2$ (där J är rotationskvanttalet) detekterades vid våglängden 119.90 μm , dvs långt in i det infraröda området.

- Med antagandet att vi kan betrakta molekylen som en stel rotor, beräkna våglängden som motsvarar övergången $J = 2 \rightarrow J = 1$ [2p]
- Beräkna avståndet, R , mellan kolatomen och väteatomen [3p]

⇒ Lösningsskiss: **TODO: Lösning här**

Uppgift 8

Stora partikelacceleratorer som de på CERN tar lång tid och kostar mycket pengar att bygga, så för att komma överens om planerna för framtiden kommer Europas partikelfysiker under 2025 att arbeta mycket med att uppdatera sin gemensamma långsiktiga strategi för framtida forskningsanläggningar. Ett förslag är att bygga en ny tunnel i underjorden runt CERN, med ca 91 km omkrets, för att bygga en accelerator där strålar med elektroner och positroner med samma energi men motsatt riktning kolliderar med en masscentrumenergi på upp till $E_{\text{kin}}^{\text{CM}} = 360 \text{ GeV}$. Om de inte lyckats bygga acceleratorer där strålar med motsatt riktning, utan behövde förlita sig på en stråle positroner som träffar ett strålmål av elektroner i vila, hur stor rörelseenergi skulle positronerna behöva ha för att uppnå samma masscentrumenergi? [5p]

(Notera att vid hastigheter väldigt nära ljusets är det svårt att räkna med hastigheter tillförlitligt även på moderna miniräknare. Lorentzfaktorn fungerar dock utmärkt.)

⇒ Lösningsskiss: Masscentrumenergin är den energi som finns tillgänglig för att skapa nya partiklar i kolliderarexperiment. Den givna $E_{\text{CM}}^k = 360 \text{ GeV}$ är den totala kinetiska energin i masscentrumsystemet (CM), där har elektronen och positronen samma $E_{\text{CM}}^{k,e} = 180 \text{ GeV}$. Följande samband från formelsamlingen kopplar ihop energi, rörelsemängd och den sk invarianta massan, och gäller både för individuella partiklar och system av partiklar:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Den invarianta massan är samma i alla system, så vi kan utnyttja att $m^2 c^4$ är densamma för både masscentrumsystemet och labbsystemet (lab):

$$E_{\text{cm}}^2 - p_{\text{cm}}^2 c^2 = E_{\text{lab}}^2 - p_{\text{lab}}^2 \quad (9)$$

$$(10)$$

Låt oss ta fram uttryck för de vi känner till ($m = m_e$ i allt som följer nedan):

$$E_{\text{CM}} = 2(E_{\text{CM}}^{e,k} + 2mc^2) \quad (11)$$

$$p_{\text{CM}} = 0 \quad (12)$$

$$E_{\text{lab}} = 0 + E_{\text{lab}}^{e,k} + 2mc^2 \quad (13)$$

$$p_{\text{lab}} = 0 + p_{\text{lab}}^e \quad (14)$$

Vi känner alla utom p_{lab} och den sökta $E_{\text{lab}}^{e,k}$, men nu kan vi utnyttja sambandet mellan E , p och m igen men enbart för positronen som rör sig i labbramen för att eliminera p_{lab}^e :

$$(E_{\text{lab}}^{e,k} + mc^2)^2 = (p_{\text{lab}}^e)^2 + m^2 c^4 \Rightarrow \quad (15)$$

$$(p_{\text{lab}}^e)^2 = (E_{\text{lab}}^{e,k} + mc^2)^2 - m^2 c^4 = (E_{\text{lab}}^{e,k})^2 + 2E_{\text{lab}}^{e,k} mc^2 + m^2 c^4 - m^2 c^4 \quad (16)$$

$$(p_{\text{lab}}^e)^2 = (E_{\text{lab}}^{e,k})^2 + 2E_{\text{lab}}^{e,k} mc^2 \quad (17)$$

Med (17) och övriga ekvationer ovan insatta i (9) får vi nu:

$$(2E_{\text{CM}}^{e,k} + 2mc^2)^2 = (E_{\text{lab}}^{e,k} + 2mc^2)^2 - (E_{\text{lab}}^{e,k})^2 - 2E_{\text{lab}}^{e,k} mc^2 \quad (18)$$

$$4(E_{\text{CM}}^{e,k})^2 + 8E_{\text{CM}}^{e,k} mc^2 + 4m^2 c^4 = (E_{\text{lab}}^{e,k})^2 + 4E_{\text{lab}}^{e,k} mc^2 + 4m^2 c^4 - 2E_{\text{lab}}^{e,k} mc^2 \quad (19)$$

$$4(E_{\text{CM}}^{e,k})^2 + 8E_{\text{CM}}^{e,k} mc^2 = 2E_{\text{lab}}^{e,k} mc^2 \quad (20)$$

$$\Rightarrow E_{\text{lab}}^{e,k} = \frac{2}{mc^2} (E_{\text{CM}}^{e,k})^2 + 4E_{\text{CM}}^{e,k} mc^2 \quad (21)$$

Med $m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ och $E_{\text{CM}}^{e,k} = 180 \times 10^3 \text{ MeV}$ får vi $E_{\text{lab}}^{e,k} = 126.8 \times 10^9 \text{ MeV}$, dvs 126.8 PeV .

Vanligt fel: försök att räkna med hastigheter väldigt nära ljusets, trots varningen i uppgiftens lydelse.

Några formler och konstanter

version 3.4

SH1014 Modern fysik, tentamen i januari 2025

Naturkonstanter

Ljusets hastighet i vakuum	c	$2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Elektronens laddning	e	$1.6021766 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Dielektricitetskonst. i vakuum	ϵ_0	$8.854187 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabiliteten i vakuum	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Plancks konstant	h	$6.62618 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4.13570 \cdot 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$
Boltzmanns konstant	k_B	$1.38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Avogadros tal	N_A	$6.022045 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$1/4\pi\epsilon_0$		$8.98755 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Omvandlingsfaktorer och enheter

$1 \text{ eV} = 1.6021766 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
$1 \text{ b [barn]} = 10^{-28} \text{ m}^2$
$1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV}/c^2 = 1.660566 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
$1 \text{ Bq} = 1 \text{ sönderfall/s}$
$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$
$1 \text{ Å [Ångström]} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
$1 \text{ fm [fermi]} = 1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Några matematiska formler

Följande integraler kan vara användbara:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^m e^{-br} dr &= \frac{m!}{b^{m+1}} \\ \int_0^\infty e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \\ \int_0^\infty x e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{2b} \\ \int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}\end{aligned}$$

Vilomassor

Partiklar:

	u [atomär massenhet]	MeV/c ²
Elektron	$5.485803 \cdot 10^{-4}$	0.511003
Proton	1.00727647	938.280
Neutron	1.00866501	939.573
Deutron	2.01355321	1875.628
Alfapartikel	4.00150618	3727.409
π^+		139.570
π^-		139.570
π^0		134.977

Atomer:

	u [atomär massenhet]	MeV/c ²
^1H	1.007825	
^2H	2.014101	
^3H	3.016049	
^4He	4.002603	
^{12}C	12.000000	
^{14}N	14.003074	
^{16}O	15.994914	
^{90}Sr	89.907737	
^{91}Sr	90.910203	
^{92}Sr	91.911037	
^{98}Zr	97.912734	
^{99}Zr	98.916512	
^{100}Zr	99.917761	
^{147}Ba	146.934945	
^{209}Po	208.982430	
^{239}Pu	239.052163	
^{240}Pu	240.053813	
^{241}Pu	241.056851	

Speciell Relativitetsteori

Lorentztransformationen

Två inertialsystem, S och S' . Vid $t = 0$ och $t' = 0$ befinner sig O och O' i samma punkt. S' rör sig med hastigheten v längst x -axeln relativt S . Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}$$

Den inversa Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x').\end{aligned}$$

Dopplereffekten

Observerad frekvens f på ljuset då det utsänds från en ljuskälla som i sitt system har ljusfrekvensen f_0 då ljuskällan färdas med hastigheten v i vinkeln θ mot observatören. $\theta = 0$ motsvarar att källan rör sig *rakt ifrån* observatören.

$$f = \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta)}.$$

Hastighetstransformationer

Transformation av hastigheter mellan S' och S :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)} \\u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)}\end{aligned}$$

Samband mellan rörelsemängd och energi

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

Vågor och Partiklar

Plancks strålningslag

$$\begin{aligned}I(\nu, T) &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \left[\frac{W}{m^2} \frac{1}{Hz} \frac{1}{sr} \right] \\I(\lambda, T) &= \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT} - 1} \left[\frac{W}{m^2} \frac{1}{Hz} \frac{1}{sr} \right]\end{aligned}$$

Wiens förskjutningslag

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} [m \cdot K]}{T [K]}$$

Comptonspridning

Då en inkommande foton med våglängden λ sprids (i vinkeln θ) mot en stillastående elektron så gäller:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta).$$

där λ' är våglängden för den spridda fotonen. För fotonenergierna gäller på motsvarande sätt:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2}.$$

Kvantmekanik

Den tidsberoende en-dimensionella Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Normaliseringsvillkor i en dimension:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

Oändlig en-dim. lådpotential, lösning

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \left[\hbar = \frac{h}{2\pi} \right] = \frac{n^2h^2}{8ma^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Harmonisk, oscillatorpotential, en-dim.:

Potential: $U(x) = \kappa x^2/2$.

Lösning:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$.

Potentialbarriärer

Transmissionssannolikheten och reflektionssannolikheten vid en potentialbarriär beror av energin U_0 , dess längd a och den inkommande partikelns energin E .

Om $E > U_0$ så har vi:

$$R = \frac{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right]}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)} \quad (1)$$

$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)} \quad (2)$$

Om $E < U_0$ så har vi:

$$R = \frac{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right]}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}$$
$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}$$

Tunnling genom bred potential:

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} (1 - E/U_0) e^{-2a\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar} \quad ; \text{ om } a \gg \frac{1}{\alpha},$$

$$\text{där } \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Operatorer

Exempel på operatorer (en-dim):

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$
$$\hat{x} = x$$
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x).$$

Den tidsberoende Schrödingerekvationen i operatorform:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

Väntevärde och osäkerhet

Väntevärdet $\bar{Q}$ för observabeln Q :

$$\bar{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{Q} \Psi(x, t) dx.$$

Osäkerheten ΔQ för en observabel Q skrivs nu:

$$\Delta Q = \sqrt{(\overline{Q^2}) - (\bar{Q})^2}$$

Väteatomen

Coulombpotential från punktkälla/proton:

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

Kvanttal i lösningen för väteatomen

- huvudkvanttal, $n = 1, 2, 3, \dots$
- bankvanttal, $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$
- magnetiskt kvanttal, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
- spinnmagnetiskt kvanttal, $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Vätelika atomer - energier

$$E_n = \frac{-m_e e^4 Z^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

där Z är antalet protoner i atomkärnan ($Z = 1$ för väte).

Väteatomen - vågfunktioner

Vinkeldel

$$\Phi(\phi) = e^{im_l\phi}, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Theta(\theta) = P_l^{m_l}(\cos\theta) \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$
$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

l, m_l	$\Theta(\theta)_{l, m_l} \cdot \Phi_{m_l}(\phi) = Y_l^{m_l}$
$0, 0$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$1, 0$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
$1, \pm 1$	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$

Radiell del

n, l	$R_{nl}(r)$
$1, 0$	$\frac{1}{a_0^{3/2}} 2e^{-r/a_0}$
$2, 0$	$\frac{2}{(2a_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-r/2a_0}$
$2, 1$	$\frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{\sqrt{3} \cdot a_0} e^{-r/2a_0}$

Bohrradien a_0 skrivs:

$$a_0 = \frac{(4\pi\epsilon_0)\hbar^2}{me^2}$$

Med insatta naturkonstanter får vi $a_0 = 0.0529 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Kvantiserat rörelsemängdsmoment

$$\begin{aligned} |L| &= \hbar\sqrt{l(l+1)} & l &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ L_z &= m_l\hbar & m_l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \\ |S| &= \hbar\sqrt{s(s+1)} & s &= \frac{1}{2} \text{ (elektron)} \\ S_z &= m_s\hbar & m_s &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Magnetiskt dipolmoment

Magnetisk dipolmoment från banrörelse:

$$\bar{\mu}_L = -\frac{e}{2m_e}\bar{L}.$$

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e}L_z$$

Magnetisk dipolmoment från spinn:

$$\bar{\mu}_S = -g_s\frac{e}{2m_e}\bar{S}$$

Totalt magnetisk dipolmoment:

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_L + \bar{\mu}_S = -\frac{e}{2m}(\bar{L} + g_s\bar{S})$$

Potentiell energi för en magnetisk dipol, μ , i ett yttre magnetiskt fält, $\bar{B} = B_z$:

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} = -\mu_z B$$

Spin-bankoppling

Magnetfältet som elektronen upplever från banrörelsen:

$$\bar{B}_L = \frac{\mu_0 e}{4\pi m_e r^3} \bar{L}, \quad (3)$$

Energiskift, ΔU :

$$\Delta U = \bar{\mu}_s \cdot \bar{B}_L = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e^2 r^3} (\bar{S} \cdot \bar{L}) \quad (4)$$

Spektroskopisk notation

s för $l = 0$
p för $l = 1$
d för $l = 2$
f för $l = 3$
g för $l = 4$
h för $l = 5$.

Molekylfysik

Reducerad massa:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Rotationsenergier:

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad J = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Vibrationsenergier:

$$E_{\text{vib}} = (V + \frac{1}{2})h\nu_0 \quad V = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/\mu}$.

Fasta tillståndets fysik

Fermi-Dirac-fördelningen:

$$N(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mathcal{E}_F)/k_B T} + 1}$$

Effektiv massa:

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left(\frac{d^2 \mathcal{E}}{dk^2} \right)^{-1}$$

Partikelfysik

Standardmodellen i tabellform:

Fermioner					Bosoner
Kvarkar	u upp	c charm	t topp	γ foton	
	d ner	s sär	b botten	g gluon	
Leptoner	ν_e elektron- neutrino	ν_μ myon- neutrino	ν_τ tau- neutrino	Z_0 Z-boson	
	e elektron	μ myon	τ taun	$W^\pm$ W-boson	

Periodiska systemet

123456789101112131415161718

Grundämne Nr Väte 1 H																		Helium 2 He
Litium 3 Li	Beryllium 4 Be	grundämnets namn atomnummer Symbol												Syre 8 O	Fluor 9 F	Neon 10 Ne		
Natrium 11 Na	Magnesium 12 Mg													Swavel 16 S	Klor 17 Cl	Argon 18 Ar		
Kalium 19 K	Kalcium 20 Ca	Skandium 21 Sc	Titan 22 Ti	Vanadin 23 V	Krom 24 Cr	Mangan 25 Mn	Järn 26 Fe	Kobolt 27 Co	Nickel 28 Ni	Koppar 29 Cu	Zink 30 Zn	Gallium 31 Ga	Germanium 32 Ge	Arsenik 33 As	Selen 34 Se	Brom 35 Br	Krypton 36 Kr	
Rubidium 37 Rb	Strontium 38 Sr	Yttrium 39 Y	Zirkonium 40 Zr	Niob 41 Nb	Molybden 42 Mo	Teknetium 43 Tc	Rutenium 44 Ru	Rodium 45 Rh	Palladium 46 Pd	Silver 47 Ag	Kadmium 48 Cd	Indium 49 In	Tenn 50 Sn	Antimon 51 Sb	Tellur 52 Te	Jod 53 I	Xenon 54 Xe	
Cesium 55 Cs	Barium 56 Ba	Lutetium 71 Lu	Hafnium 72 Hf	Tantal 73 Ta	Volfram 74 W	Rhenium 75 Re	Osmium 76 Os	Iridium 77 Ir	Platina 78 Pt	Guld 79 Au	Kviksilver 80 Hg	Tallium 81 Tl	Bly 82 Pb	Vismut 83 Bi	Polonium 84 Po	Astat 85 At	Radon 86 Rn	
Francium 87 Fr	Radium 88 Ra	Lawrencium 103 Lr	Rutherfordium 104 Rf	Dubnium 105 Db	Seaborgium 106 Sg	Bohrium 107 Bh	Hassium 108 Hs	Meitnerium 109 Mt	Darmstadtium 110 Ds	Röntgenium 111 Rg	Copernicium 112 Cn	Nihonium 113 Nh	Flerovium 114 Fl	Moskovium 115 Mc	Livermorium 116 Lv	Tennes 117 Ts	Oganesson 118 Og	

Lantan 57 La	Cerium 58 Ce	Praseodym 59 Pr	Neodym 60 Nd	Prometium 61 Pm	Samarium 62 Sm	Europium 63 Eu	Gadolinium 64 Gd	Terbium 65 Tb	Dysprosium 66 Dy	Holmium 67 Ho	Erbium 68 Er	Tulium 69 Tm	Ytterbium 70 Yb
Aktinium 89 Ac	Torium 90 Th	Protaktinium 91 Pa	Uran 92 U	Neptunium 93 Np	Plutonium 94 Pu	Americium 95 Am	Curium 96 Cm	Berkelium 97 Bk	Californium 98 Cf	Einsteinium 99 Es	Fermium 100 Fm	Mendelevium 101 Md	Nobelium 102 No

A	Element	Mass [u]	A	Element	Mass [u]	A	Element	Mass [u]
210	Fr	209.996407	216	Pa	216.019109	224	Rn	224.024090
210	Ra	210.000494	217	Bi	217.009470	224	Fr	224.023249
210	Ac	210.009435	217	Po	217.006334	224	Ra	224.020211
210	Th	210.015075	217	At	217.004718	224	Ac	224.021722
211	Tl	210.993477	217	Rn	217.003927	224	Th	224.021466
211	Pb	210.988736	217	Fr	217.004631	224	Pa	224.025625
211	Bi	210.987269	217	Ra	217.006320	224	U	224.027604
211	Po	210.986653	217	Ac	217.009346	225	Rn	225.028440
211	At	210.987496	217	Th	217.013114	225	Fr	225.025565
211	Rn	210.990600	217	Pa	217.018323	225	Ra	225.023611
211	Fr	210.995536	217	U	217.024368	225	Ac	225.023229
211	Ra	211.000897	218	Bi	218.014316	225	Th	225.023951
211	Ac	211.007734	218	Po	218.008973	225	Pa	225.026130
211	Th	211.014928	218	At	218.008694	225	U	225.029390
212	Tl	211.998228	218	Rn	218.005601	225	Np	225.033913
212	Pb	211.991897	218	Fr	218.007578	226	Rn	226.030890
212	Bi	211.991285	218	Ra	218.007140	226	Fr	226.029386
212	Po	211.988867	218	Ac	218.011641	226	Ra	226.025409
212	At	211.990744	218	Th	218.013284	226	Ac	226.026098
212	Rn	211.990703	218	Pa	218.020041	226	Th	226.024903
212	Fr	211.996202	218	U	218.023535	226	Pa	226.027947
212	Ra	211.999794	219	Po	219.013744	226	U	226.029338
212	Ac	212.007813	219	At	219.011161	226	Np	226.035145
212	Th	212.012980	219	Rn	219.009480	227	Rn	227.035407
212	Pa	212.023204	219	Fr	219.009252	227	Fr	227.031835
213	Pb	212.996581	219	Ra	219.010085	227	Ra	227.029177
213	Bi	212.994384	219	Ac	219.012420	227	Ac	227.027752
213	Po	212.992857	219	Th	219.015536	227	Th	227.027704
213	At	212.992936	219	Pa	219.019883	227	Pa	227.028805
213	Rn	212.993882	219	U	219.024919	227	U	227.031156
213	Fr	212.996189	220	Po	220.016602	227	Np	227.034956
213	Ra	213.000383	220	At	220.015407	228	Rn	228.037986
213	Ac	213.006607	220	Rn	220.011393	228	Fr	228.035729
213	Th	213.013010	220	Fr	220.012327	228	Ra	228.031070
213	Pa	213.021109	220	Ra	220.011028	228	Ac	228.031021
214	Pb	213.999805	220	Ac	220.014762	228	Th	228.028741
214	Bi	213.998711	220	Th	220.015747	228	Pa	228.031051
214	Po	213.995201	220	Pa	220.021875	228	U	228.031374
214	At	213.996371	220	U	220.024723	228	Np	228.036180
214	Rn	213.995362	221	At	221.018050	228	Pu	228.038742
214	Fr	213.998971	221	Rn	221.015536	229	Fr	229.038450
214	Ra	214.000107	221	Fr	221.014254	229	Ra	229.034957
214	Ac	214.006901	221	Ra	221.013917	229	Ac	229.033015
214	Th	214.011499	221	Ac	221.015591	229	Th	229.031762
214	Pa	214.020918	221	Th	221.018183	229	Pa	229.032096
215	Pb	215.004807	221	Pa	221.021877	229	U	229.033505
215	Bi	215.001769	221	U	221.026399	229	Np	229.036263
215	Po	214.999419	222	At	222.022330	229	Pu	229.040150
215	At	214.998652	222	Rn	222.017577	230	Fr	230.042510
215	Rn	214.998745	222	Fr	222.017551	230	Ra	230.037056
215	Fr	215.000341	222	Ra	222.015374	230	Ac	230.036294
215	Ra	215.002719	222	Ac	222.017843	230	Th	230.033133
215	Ac	215.006453	222	Th	222.018468	230	Pa	230.034540
215	Th	215.011730	222	Pa	222.023742	230	U	230.033939
215	Pa	215.019185	222	U	222.026086	230	Np	230.037827
216	Bi	216.006305	223	At	223.025190	230	Pu	230.039649
216	Po	216.001915	223	Rn	223.021790	231	Fr	231.045440
216	At	216.002423	223	Fr	223.019735	231	Ra	231.041220
216	Rn	216.000274	223	Ra	223.018502	231	Ac	231.038558
216	Fr	216.003197	223	Ac	223.019137	231	Th	231.036304
216	Ra	216.003533	223	Th	223.020811	231	Pa	231.035883
216	Ac	216.008720	223	Pa	223.023962	231	U	231.036293
216	Th	216.011062	223	U	223.027738	231	Np	231.038245