

Frågor med förslag till lösningar. OBS: detta dokument innehåller ej fullständiga lösningar!

Uppgift 1

Fråga

I CERN skapas π^+ -mesoner med en rörelseenergi på 1 GeV då en protonstråle kolliderar med protoner i ett stillasittande mål. I vila har π^+ en halveringstid på 18 ns. Hur långt från målet kommer pionerna i genomsnitt innan de sönderfaller, sett från laboratoriets perspektiv? [5p]

Lösning

π^+ -mesonens (pion) viloenenergi: $mc^2 = 140 \text{ MeV}$.

$$E_k = (\gamma - 1)mc^2 \Rightarrow \gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{1 \text{ GeV}}{140 \text{ MeV}} = 1 + \frac{1000}{140} = 8.14$$

$$\gamma \gg 1 \Rightarrow v \approx c \Rightarrow \Delta x = vt \approx ct$$

Längden av sträckan som pionen i genomsnitt rör sig i laboratoriet innan den sönderfaller beror av dess medellivstid $\tau = t_{1/2}/\ln 2$. Eftersom pionen rör sig relativistisk blir dess medellivstid tidsdilaterad: $\tau' = \gamma\tau$. Detta ger:

$$\Delta x \approx ct = c\tau' = c\gamma\tau = c\gamma \frac{t_{1/2}}{\ln 2} = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \cdot 8.14 \cdot \frac{18 \text{ ns}}{\ln 2} = 63 \text{ m}$$

Uppgift 2

Fråga

- Härled ett uttryck för skalärprodukten $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ uttryckt i kvanttalen j , l och s genom att utgå från $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. [2p]
- Beräkna vinkeln mellan banrörelsemängdsmomentet och spinnet för tillstånden $j = 1/2$, $l = 1$ och $j = 3/2$, $l = 1$. Använd att $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = |\mathbf{L}||\mathbf{S}|\cos\Theta$ där Θ är vinkeln mellan $\mathbf{L}$ och $\mathbf{S}$. [3p]

Lösning

a)

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{J}|^2 &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \Rightarrow \\
 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2}(|\mathbf{J}|^2 - |\mathbf{L}|^2 - |\mathbf{S}|^2) \\
 (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})\Psi &= \frac{1}{2}(|\mathbf{J}|^2 - |\mathbf{L}|^2 - |\mathbf{S}|^2)\Psi = \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\hbar^2\Psi
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} &= |\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{S}| \cos \Theta \Rightarrow \cos \Theta = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{S}|} \Rightarrow \\
 \Theta &= \arccos \left(\frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{S}|} \right) = \arccos \left(\frac{\frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]}{\sqrt{l(l+1)}\sqrt{s(s+1)}} \right)
 \end{aligned}$$

 $j = 1/2, l = 1:$

$$\Theta = \arccos \left(\frac{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{3}{2}) - 1(2) - \frac{1}{2}(\frac{3}{2})]}{\sqrt{1(2)}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{3}{2})}} \right) = \arccos \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = 145^\circ$$

 $j = 3/2, l = 1:$

$$\Theta = \arccos \left(\frac{\frac{1}{2}[\frac{3}{2}(\frac{5}{2}) - 1(2) - \frac{1}{2}(\frac{3}{2})]}{\sqrt{1(2)}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{3}{2})}} \right) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1}{6}} \right) = 66^\circ$$

Uppgift 3

Fråga

En väteatom befinner sig i det första exciterade tillståndet med $n = 2$ och $l = 0$.

a) Hur många sådana tillstånd är möjliga [1p]?

b) Beräkna väntevärdet Δr för det tillståndet. Integralen

$$\int_0^\infty r^m e^{-br} dr = \frac{m!}{b^{m+1}}$$

är användbar i detta problem. [4p]

Lösning

a) Två tillstånd $(nlm_l m_s) = (200 \frac{1}{2})$ och $(200 - \frac{1}{2})$

b) Osäkerheten ges av $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_0^\infty \Psi^* r \Psi r^2 dr = \int_0^\infty r^3 \frac{4}{(2a)^3} \left(1 - \frac{r}{2a}\right)^2 e^{-r/a} dr = \\ &= \frac{4}{(2a)^3} \int_0^\infty \left(r^3 - \frac{r^4}{a} + \frac{r^5}{4a^2}\right) e^{-r/a} dr = \frac{1}{2a^3} (6a^4 - 24a^4 + 30a^4) = 6a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \int_0^\infty \Psi^* r^2 \Psi r^2 dr = \frac{1}{2a^3} \int_0^\infty \left(r^4 - \frac{r^5}{a} + \frac{r^6}{4a^2}\right) e^{-r/a} dr = \\ &= \frac{1}{2a^3} (24a^5 - 120a^5 + 180a^5) = 42a^2 \end{aligned}$$

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \sqrt{42a^2 - 36a^2} = \sqrt{6}a$$

Uppgift 4

Fråga

Bestäm reflektionskoefficienten för en elektron med energin 5 eV som kolliderar med ett potentialsteg där potentialen minskar med 2 eV. [5p]

Lösning

Lösningen har formen

$$\Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \text{ för } x < 0$$

$$\Psi = Ae^{iKx}, \text{ för } x > 0$$

Insättning i den tidsberoende Schrödingerekvationen ger

$$\begin{aligned} x < 0 : \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi &= E \Psi \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ x > 0 : \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \Psi + U \Psi &= E \Psi \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} \end{aligned}$$

Kontinuitetsvillkoret för Ψ och $d\Psi/dx$ vid $x = 0$ ger:

$$A + B = C$$

$$ikA - ikB = iKC$$

För att bestämma reflektionskoefficienten $R = |B|^2/|A|^2$ eliminerar vi C:

$$(K - k)A + (k + K)B = 0 \Rightarrow R = \frac{(k - K)^2}{(k + K)^2} = 0.007$$

Uppgift 5

Fråga

I naturligt kalium finns det 0.012 % av den radioaktiva isotopen ^{40}K . Beräkna aktiviteten av ^{40}K i en människokropp som väger 100 kg. Antag att 0.35 % av kroppsvikten är kalium. Halveringstiden för ^{40}K är 1.31×10^9 år. $m_{\text{atom}}(^{40}\text{K}) = 39.963\,999$ u. [5p]

Lösning

I en människokropp som väger 100 kg, finns det 4.2×10^{-5} kg ^{40}K . Antalet ^{40}K atomer i kroppen:

$$N = \frac{4.2 \times 10^{-5} \text{ kg}}{39.963\,999 \text{ u/atom} \cdot 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg/u}} = 6.329 \times 10^{20} \text{ atomer}$$

Aktiviteten: $A = \lambda N$, $\lambda = \ln 2/t_{1/2}$

$$A = \frac{0.693 \cdot 6.329 \times 10^{20}}{1.31 \times 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 10.6 \times 10^3 \text{ Bq.}$$

Uppgift 6

Fråga

Av alla nuklider har ^{62}Ni den högsta bindningsenergin per nukleon.

- Beräkna bindningsenergin per nukleon för denna nuklid med hjälp av vätskedroppsmodellen (Weizsäckers halvempiriska formel). [2p]
- Vilken term ger största bidrag? [1p]
- Vad representerar denna term? [1p]
- Jämför denna bindningsenergi per nukleon med det värde du får om du använder den atomära massan för ^{62}Ni , $m_{\text{atom}}(^{62}\text{Ni}) = 61.928\,345$ u. [1p]

Lösning

a) Den halvempiriska formeln ger:

$$\text{bindningsenergi: } B(28, 62) = 548.5 \text{ MeV}$$

$$\text{bindningsenergi per nukleon: } \frac{B(28, 62)}{62} = 8.85 \text{ MeV}$$

b) Det största bidraget kommer från den första termen som är volymtermen.

c) Denna term representerar nukleonernas attraktion i atomkärnan. Bindningsenergin i första ordningen beror på antalet nukleoner, A , dvs på volymen (p.g.a. konstant densitet).

d)

$$B(28, 62) = [28m_p + 34m_n - (m_{\text{atom}}(^{62}\text{Ni}) - 28m_e)]c^2 = 545.3 \text{ MeV}$$

$$\frac{B(28, 62)}{62} = 8.80 \text{ MeV}$$

Uppgift 7

Fråga

I en vätemolekyl H_2 byts ena väteatomen ut mot deuterium (D), dvs vi får molekylen HD. Eftersom elektronstrukturen är i det närmaste densamma kan man anta att bindningslängd, kärnavståndet och fjäderkonstant inte ändras. Beräkna med vilka faktorer rotations- och vibrationsövergångar ändras. [5p]

Lösning

Energi för rotationsövergångar

$$\Delta E_{\text{rot}} = E_{\text{rot}}(J) - E_{\text{rot}}(J-1) = \frac{\hbar^2 J}{I}$$

$$\text{där } I = \mu R^2 \quad \text{och} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Avståndet R ändras inte men däremot den reducerade massan μ . För väte gäller att $\mu_{\text{HH}} = 0.5 m_H$ medan för HD gäller att $\mu_{\text{HD}} \approx \frac{2}{1+2} m_H = 2/3 m_H$.

Energin för rotationsövergångar ändras då med en faktor $\frac{\mu_{\text{HH}}}{\mu_{\text{HD}}} \approx 3/2 \times 0.5 \approx 0.75$.

Energin för vibrationsövergångar

$$\Delta E_{\text{vib}} = E_{\text{vib}}(v) - E_{\text{vib}}(v-1) = \hbar\omega = \hbar\sqrt{K/\mu}$$

där K inte ändras. Förändringsfaktorn blir då $\sqrt{\frac{\mu_{\text{HH}}}{\mu_{\text{HD}}}} \approx \sqrt{0.75} \approx 0.87$.

Uppgift 8

Fråga

Neutronstrålning med kinetiska energin 0.014 eV används i ett diffraktionsexperiment för att avgöra avståndet mellan atomplanen i ett okänt material. Om man ser konstruktiv interferens vid vinklarna 23.0° och 51.4° mot ytan, men ingenting däremellan, vad är avståndet mellan planen? [5p]

Lösning

De Broglies hypotes ger:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Neutronernas kinetiska energi (E_k) = $0.014 \text{ eV} \ll m_n c^2 \Rightarrow$ relativistiska ekvationer behöver inte användas.

$$p = \sqrt{2m_n E_k} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.235 \text{ nm}$$

Braggdiffraktionen följer sambandet

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

Vi känner λ och θ och kan då direkt beräkna d :

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \theta}$$

Vi antar att 23.0° och 51.4° är vinklarna för de två första maxima ($n = 1$ och $n = 2$) vilket ger

$$d_1 = \frac{\lambda}{2 \sin \theta_1} = 0.31 \text{ nm}, \quad d_2 = \frac{2\lambda}{2 \sin \theta_2} = 0.31 \text{ nm}$$

Avståndet mellan atomplanen är $3.1 \text{ \AA}$.