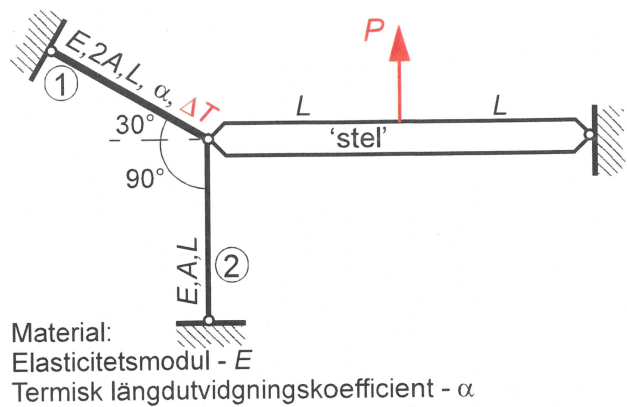


Lösningförslag: Tentamen (KON2 & TEN2) SE1010/SE1020 1/2

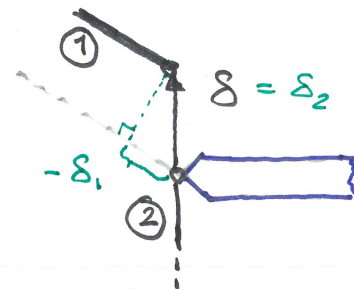
1. En stel bom hålls på plats med två stänger (av samma längd L och termoelastiska material men med olika tvärsnitt) enligt figuren.

Bommen belastas på sin mitt med en vertikal kraft P , och stång 1 ges även en temperaturhöjning ΔT .

Vilken normalkraft N_{bom} fås då i bommen? Notera att svaret behöver innehålla två termer, en för varje lastfall. (6p)



Inför knutförskjutning δ , identifiera för stängerna:



i	δ_i	$\epsilon_i = \frac{\delta_i}{L_i}$	$\sigma_i = E_i(\epsilon_i - \alpha_i \Delta T_i)$	$N_i = \sigma_i A_i$
①	$-\frac{\delta}{2}$	$-\frac{\delta}{2L}$	$E(-\frac{\delta}{2L} - \alpha \Delta T)$	$-2EA(\frac{\delta}{2L} + \alpha \Delta T) = N_1 = -N_2 - 2EA\alpha \Delta T$
②	δ	$\frac{\delta}{L}$	$\frac{E\delta}{L}$	$\frac{E\delta}{L} = N_2 = -N_1 - 2EA\alpha \Delta T$

Momentjämvikt för bommen

$$\sum \circlearrowleft P \cdot L + N_1 \sin 30^\circ \cdot 2L - N_2 \cdot 2L = 0$$

$$P + N_1 + 2(2EA\alpha \Delta T + N_1) = 0 \Rightarrow N_1 = -\frac{P + 4EA\alpha \Delta T}{3}$$

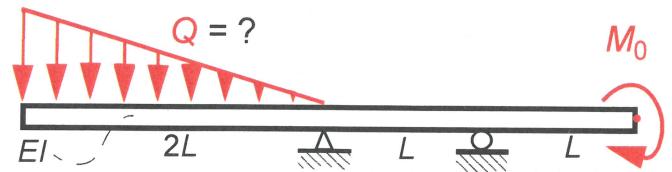
Kraftjämvikt för knuten:

ger nu att: $N_{\text{bom}} - N_1 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_{\text{bom}} = -\frac{P}{2\sqrt{3}} - \frac{2EA\alpha \Delta T}{\sqrt{3}}$

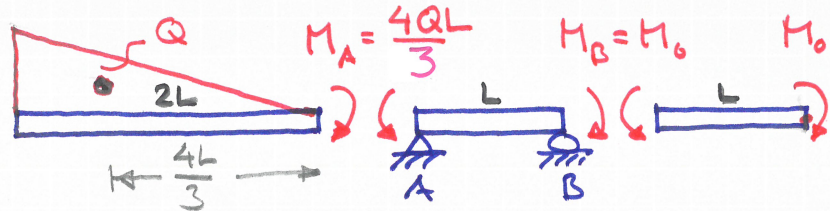
Notera att δ ej behöver bestämmas explicit, men kan fås genom insättning ovan när krafterna är kända

2. De två överskjutande delarna av en fritt upplagd balk (längd $4L$, böjstyvhets EI) belastas av en triangulärt fördelad last Q respektive ett punktmoment M_0 längst ut, se figuren.

Bestäm lasten Q så att båda balkändar får samma nedböjning. (6p)



Snitta vid de två stöden
för att få snittmomenten
där (mha jämvikt)



Dessa orsakar vinklar (rotation) vid stöden:

$$\Theta_A = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI} = \frac{4QL^2}{9EI} + \frac{M_0 L}{6EI}$$

$$\Theta_B = \frac{M_0 L}{3EI} + \frac{2QL^2}{9EI}$$

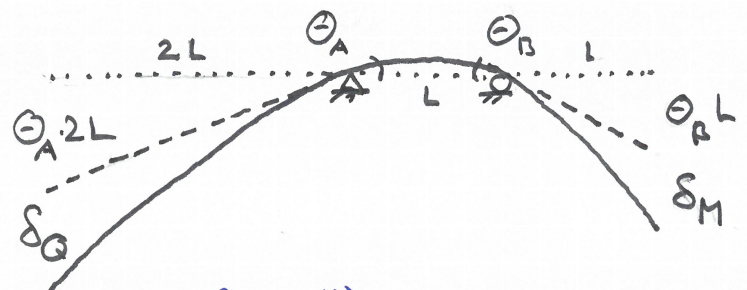
De två överskjutande delarna separat (fast inspända)

$$\delta_Q = \frac{11Q(2L)^3}{60EI} \quad \text{resp} \quad \delta_M = \frac{M_0 L^2}{2EI}$$

Sammantaget vid varje
ände fäs nu till

vänster: $\Theta_A \cdot 2L + \delta_Q$

höger: $\Theta_B \cdot L + \delta_M$, och likhet (insatt):



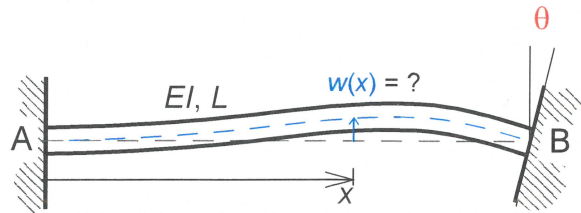
$$(T_v) \frac{22QL^3}{15EI} + \frac{8QL^3}{9EI} + \frac{2M_0 L^2}{6EI} = \frac{M_0 L^2}{3EI} + \frac{2QL^3}{9EI} + \frac{M_0 L^2}{2EI} \quad (T_h)$$

Varav $\frac{QL^3}{EI} \frac{66+40-10}{45} = \frac{M_0 L^2}{EI} \frac{2+3-2}{6}$ eller $Q = \frac{M_0}{L} \frac{15}{64}$

3. Båda ändar av en balk (längd L , böjstyvhets EI) är fast inspända, men till höger har det blivit ett litet vinkelfel θ som (överdrivet) visas i figuren.

Beräkna de två nollskilda reaktionslasterna till vänster med valfri metod.

Bestäm även utböjningen $w(x)$ mha elastiska linjens differentialekvation och randvillkor, samt utgående från $w(x)$, beräkna (minst en av de nollskilda) snittlasterna vid $x = 0$. (6p)



Samband mellan Θ och M vid B fås av elementarfäll (tab. 3.1-III)

$$\Theta_B = \frac{M_B L}{4EI} \quad \text{dvs} \quad M_B = \frac{4EI}{L} \Theta$$



Alt: Bestäm M_A & M_B som i uppg 2 mha $\Theta_A = 0, \Theta_B = \Theta$

Där fås även att $M_A = -\frac{M_B}{2} = -\frac{2EI}{L} \Theta$



Jämvikt för (den frilagda) balken:

$$\begin{cases} \uparrow R_A + R_B = 0 \\ \curvearrowleft M_A + R_B L - M_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B = \frac{M_B - M_A}{L} = \frac{3M_B}{2L} = \frac{6EI}{L^2} \Theta = -R_A \\ R_A = -\frac{6EI}{L^2} \Theta ; M_A = -\frac{2EI}{L} \Theta \end{cases}$$

Diff.ekv: $EI w''''(x) = q(x) = 0$ (här)

Randvillkor

$$\begin{cases} \text{vid } x=0 & \begin{cases} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases} \\ \text{vid } x=L & \begin{cases} w(L) = 0 \\ w'(L) = -\Theta \end{cases} \end{cases}$$

Allmän lösning: $w(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

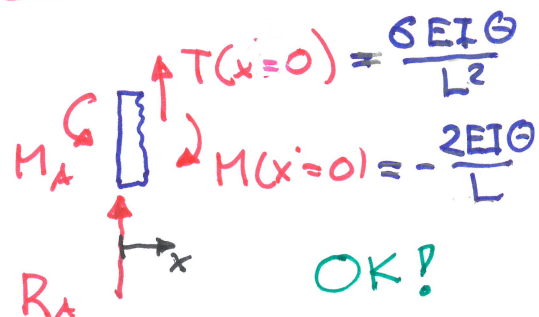
$$\begin{cases} D=0, C=0, \\ AL^3 + BL^2 = 0 \\ 3AL^2 + 2BL = -\Theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -AL \\ A = -\frac{\Theta}{L^2} \end{cases}$$

$$\text{Dvs: } w(x) = -\Theta L \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] = \Theta L \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] = w(x)$$

Snittlaster:

$$M(x) = -EI w''(x) = EI \Theta L \frac{6x-2}{L^3}$$

$$T(x) = -EI w'''(x) = EI \Theta L \frac{6}{L^3}$$



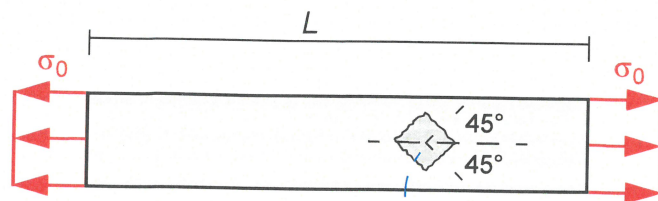
OK!

4. Ett symmetriskt korslaminat kan allmänt beskrivas som ett ortotrop material. Med samma andel fibrer i vardera riktning fås specialfallet att materialets två huvudriktningar i planet blir likvärdiga.

I Hookes generaliserade lag (given i figuren) gäller då att $E_1 = E_2 = E$ och $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$. Däremot är $G_{12} \equiv G \neq E/[2(1+\nu)]$.

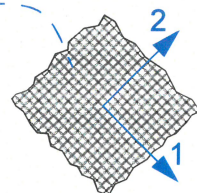
En provstav (längd L) av det materialet belastas nu enaxligt med spänningen σ_0 i 45° -riktningen relativt materialets huvudriktningar.

Redovisa hur provstavens förlängning beror av materialets tre elastiska parametrar E , ν och G . Kontrollera även att det svaret blir det förväntade för ett isotropt material. (6p)



Ortotrop material (2D)
i dess 1-2-system:

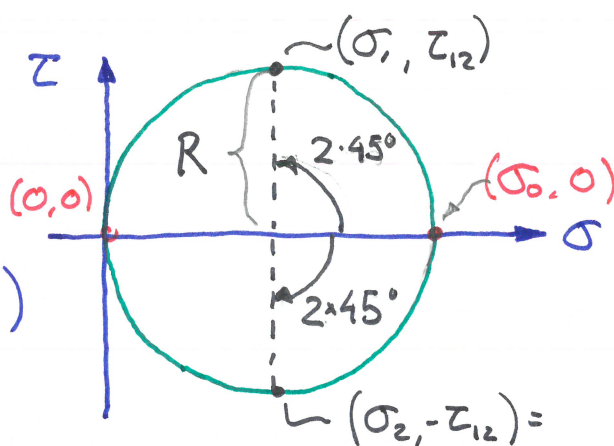
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 \\ -\nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$



Transformera enaxlig
drägnings (σ_0) till materialets
huvudriktningar (1-2 syst.)

tex mks Mohrs cirkel (radie $\frac{\sigma_0}{2}$)
(alt. ekv. 1.17-18)

Man ser att $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{12} = R = \frac{\sigma_0}{2}$



I korslaminatets ortotropiriktningar fås då:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_0}{2E}(1-\nu); \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_0}{2E}(1-\nu); \quad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} = \frac{\sigma_0}{2G}$$

Töjning längs provstavens riktn ($+45^\circ$ fr 1-riktn), tex mks

$$\text{Ekv. 2.21 } \varepsilon_{\text{längs}} = \varepsilon_1 \cos^2 \varphi + \varepsilon_2 \sin^2 \varphi + \gamma_{12} \cos \varphi \sin \varphi =$$

$$= \frac{\sigma_0}{2} \left[\frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{\sigma_0}{4} \left[\frac{2}{E}(1-\nu) + \frac{1}{G} \right]$$

$$\text{Kolla för } G = \frac{E}{2(1+\nu)} : \quad \varepsilon_{\text{längs}} = \frac{\sigma_0}{4} \left[\frac{2(1-\nu)}{E} + \frac{2(1+\nu)}{E} \right] = \frac{\sigma_0}{E}$$

Provstavens förlängning: $L \cdot \varepsilon_{\text{längs}}$

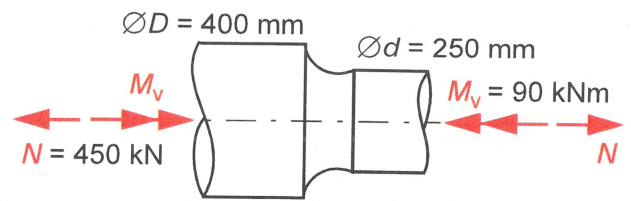
$\frac{1}{G}$

SSB!

5. För en axel med en dimensionsövergång har man numeriskt bestämt spänningskoncentrationsfaktorer i ren vridning ($K_{t,v} = 1,41$), respektive för ren dragning ($K_{t,d} = 1,68$), baserade på nominella spänningar i den smalare axeln.

Lasterna är $M_v = 90$ kNm respektive $N = 450$ kN och materialet har sträckgräns $\sigma_s = 320$ MPa.

Uppskatta säkerheten mot plasticering enligt von Mises. (6p)



Vid dimensionsövergången gäller att:

Vridning: $\tau_{max} = 1,41 \cdot \tau_{nom}$ med $\tau_{nom} = \frac{M_v}{W_v} = \frac{16 M_v}{\pi d^3} = 29,3$ [MPa]

Dragning: $\sigma_{max} = 1,68 \cdot \sigma_{nom}$ där $\sigma_{nom} = \frac{N}{A} = \frac{4N}{\pi d^2} = 9,2$

(lägg spänningar i omkretsled, τ_{max} & σ_{max} i samma omv.)

$$\sigma_{eff, max}^{vn} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \dots = 73,3 \text{ MPa}$$

Varav: $n = \frac{\sigma_s}{\sigma_{eff, max}^{vn}} = 4,37$

6. Rita (reducerat) Haigh-diagram

Lasten $P(t) = P_0[1 + \frac{3}{2}\sin\omega t]$
ger spänningar (nominellt)

$$\sigma(t) = \sigma_0[1 + \frac{3}{2}\sin\omega t], \quad \sigma_0 = \frac{4P_0}{\pi d^2}$$

arbetslinje med lutning $3/2$.

Skärning fås vid 49 ± 74 [MPa]

Dividera med 2.5 ger:

Arbetspunkt $\sim 20 \pm 30$ MPa

Superponera (konstant) tyngd,
dvs drag $\sigma_m = \frac{4Mg}{\pi d^2} = 200$ MPa.

Ny arbetspkt: 220 ± 30 MPa

$P(t)$ samma $\Rightarrow$ Samma lutning
på nya arbetslinjen, med

Skärning $\sim 240 \pm 60$ MPa

Utnyttjat $\sim$ halva, dvs $n \approx 2$
(i ter amplitud 60/30)

6. En stång ($\varnothing d = 10$ mm, material 141650-01)
belastas i dragning av en tidsberoende last
 $P(t) = P_0[1 + (3/2)\sin(\omega t)]$. Totala reduktionen har
bestämts till 0,38 och lasten P_0 är sådan att säker-
heten mot utmattning är 2,5 i arbetspunkten.

Därefter belastas stängen dessutom av en tyngd
 $Mg = 15,7$ kN.

Beräkna och rita in den nya arbetspunkten i ett
reducerat (skalenligt) Haigh-diagram samt bestäm
den säkerhetsfaktor n man nu har mot utmattning
med lastparametern P_0 . (6p)

