

Frågor med förslag till lösningar. OBS: detta dokument innehåller ej fullständiga lösningar!

Uppgift 1

Fråga

En astronom observerar ljus från en avlägsen supernova. En del av de observerade fotonerna har sitt ursprung från en övergång i väteatomen med våglängden 656.5 nm. a) Astronomen mäter våglängden för denna spektrallinje till 1573 nm när supernovan rör sig bort från jorden. Beräkna supernovans hastighet relativt jorden. [3p] b) Vilken våglängd skulle spektrallinjen ha om supernovan rör sig i motsatt riktning? [2p]

Lösning

Från formelblad:

$$f = \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta)}.$$

$$f = \frac{c}{\lambda}, \lambda_0 = 656.5 \text{ nm}, \lambda = 1573 \text{ nm}.$$

a) Supernovan rör sig bort från jorden: $\theta = 0^\circ$ och $\cos\theta = 1$ ger: $v = 0.7c$.

b) Supernovan rör sig mot jorden: $\theta = 2\pi$ och $\cos\theta = -1$ ger: $\lambda = 274 \text{ nm}$.

Uppgift 2

Fråga

I atmosfären är kvoten mellan ^{14}C och ^{12}C ungefär konstant och lika med 1.2×10^{-12} . Levande organismer (djur och växter) utbyter koldioxid med omgivningen. Detta medför att $^{14}\text{C} / ^{12}\text{C}$ kvoten är konstant och ungefär lika med det ovan angivna värdet i en organism så länge den lever. När organismen dör upphör utbytet av koldioxid med omgivningen och kvoten minskar, eftersom ^{14}C är radioaktivt. Genom att bestämma $^{14}\text{C} / ^{12}\text{C}$ kvotens storlek vid ett visst tillfälle kan man alltså bestämma när organismen dog. Denna dateringsmetod kallas ^{14}C -metoden. Hösten 1991 hittades ismannen Ötzi på 3200 meters höjd vid gränsen mellan Österrike och Italien. Kvoten mellan ^{14}C och ^{12}C i ismannens vävnad bestämdes med hjälp av ^{14}C -metoden till ca 6.0×10^{-13} . a) Isotopen ^{14}C sönderfaller med β -sönderfall. Vilka partiklar skickas ut från atomkärnan vid sönderfallet och vilken dotterkärna skapas? [2p] b) Hur länge sedan var det ismannen dog? [3p] Halveringstiden för ^{14}C är 5730 år, $m(^{14}\text{C}) = 14.003242 \text{ u}$, $m(^{12}\text{C}) = 12.000000 \text{ u}$.

Lösning

a) Reaktionen för β -sönderfall är: $n \Rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$.

Sönderfall av ^{14}C : $^{14}_6\text{C} \Rightarrow ^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}$.

b) Sönderfallslagen enligt formelbladet:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}, \text{ och } \lambda = \ln 2 / t_{1/2}$$

$$\frac{N_0(14)}{N_0(12)} = 1.2 \times 10^{-12}, \quad \frac{N_t(14)}{N_t(12)} = 6.0 \times 10^{-13}$$

$$\frac{N_t(14)}{N_t(12)} = \frac{N_0(14)}{N_0(12)} \times e^{-\lambda t} \Rightarrow t = t_{1/2} = 5730 \text{ år.}$$

Uppgift 3

Fråga

En elektron med energin 35 eV rör sig i positiv x-led och träffar på en rektangulär potentialbarriär med energin 30 eV. Hitta en längd (bredd) för potentialbarriären för vilken vi inte får någon reflektion alls. [5p]

Lösning

R finns i formelbladet för en potentialbarriär när inkommande partikelns energi $E > U$. Om $E > U_0$:

$$R = \frac{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right]}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)} \quad (1)$$

$R = 0$ ger:

$$\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] = 0 \text{ och } \sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) = n\pi \quad (2)$$

$$E - U_0 = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2} \text{ där } E - U_0 = 5 \text{ keV} \Rightarrow a = 0.28 \text{ Å} \text{ när } n = 1. \quad (3)$$

Uppgift 4

Fråga

En partikel med massan m befinner sig i ett bundet tillstånd i en endimensionell potential, $U(x)$. Vågfunktionen har den (onormerade) formen:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= A x e^{ax}, \text{ för } x > 0 \\ \Psi(x) &= 0, \text{ för } x < 0\end{aligned}$$

- a) Normera vågfunktionen, dvs. bestäm konstanten A . [1p]
 b) Bestäm uttrycket för funktionen $U(x)$ och beräkna energin E för vågfunktionen. [4p]

Lösning

- a) Normaliseringsvillkor i en dimension:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

$$\int_0^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = A^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2ax} dx = 1 \Rightarrow A = 2a^{3/2}$$

Den tidsberoende en-dimensionella Schrödingerekvationen:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[a^2 - \frac{2a}{x} \right] \psi(x) + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ E = -\frac{\hbar^2}{2m} a^2, \quad U(x) &= -\frac{\hbar^2 a}{mx}\end{aligned}$$

Uppgift 5

Fråga

I parbilningsprocessen växelverkar högenergetiska fotoner med en atomkärna och skapar ett elektron-positron-par. Elektronen och positronen har identisk vilomassa m_0 . Anta att partiklarna skickas ut vid kollisionen med hastigheten $0.6c$ och med vinkeln 60 grader relativt fotonens inkommande riktning. (Vinkeln mellan elektron och positron är 120 grader.) Beräkna fotonens energi. Du får bortse från den kinetiska energin som atomkärnan får. [3p] b) Beräkna atomkärnans tillskott i rörelsemängd, i enheter av m_0 . [2p]

Lösning

a) Energibevaring före och efter växelverkan av fotoner med atomkärnan (M) med vilomassan m_M :

$$E_\gamma + m_M c^2 = m_M c^2 + K E_M + 2\gamma m_0 c^2$$

Atomkärnans kinetiska energi är liten $\rightarrow$ termen $K E_M$ försummas $\rightarrow$

$$E_\gamma = 2\gamma m_0 c^2 = 2.5 m_0 c^2$$

b) Om $K E_M$ är liten kan man använda den icke-relativistiska formeln:

$$K E_M = \frac{p_M^2}{2m_M}$$

För fotoner:

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = 2.5 m_0 c$$

Rörelsemängdens bevarande i y-led före och efter fotonens växelverkan med atomkärnan:

$$\Rightarrow p_\gamma = 2p_e \cos(60^\circ) + p_M$$

$$p_e = \gamma m_0 c^2 0.6c$$

$$\Rightarrow p_M = 1.75 m_0 c$$

Uppgift 6

Fråga

Kolmonoxidmolekylen CO har en effektiv fjäderkonstant på 1860 N/m och ett kärnavstånd på 0.113 nm. a) Ungefär hur många rotationsnivåer finns det mellan vibrationsgrundtillståndet och det första exciterade vibrationstillståndet? Rita upp ett diagram som visar dessa tillstånd. [3p] b) Bestäm en av våglängderna av fotoner som CO kan absorbera genom vibrations-rotationsövergångar. [2p]

Lösning

a) Energiskillnaden mellan vibrationsgrundtillståndet och det första exciterade vibrations-tillståndet:

$$\Delta E_{vib} = E_{vib}(v=1) - E_{vib}(v=0) = \hbar\omega = \hbar\sqrt{K/\mu}$$

Energien för en rotationsnivå:

$$E_{rot}(J) = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I} \quad \text{där} \quad I = \mu R^2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

J_{max} = antalet rotationsnivåer mellan vibrationsgrundtillståndet och det första exciterade vibrationstillståndet:

$$\Delta E_{vib} = \frac{\hbar^2 J_{max}(J_{max} + 1)}{2I}$$

$$\Rightarrow J_{max} \approx 33. \quad (4)$$

b) En möjlig övergång är mellan tillstånden $E_{v,J} = E_{1,0}$ och $E_{0,1}$.

$$\Delta E = E_{1,0} - E_{0,1} \quad \text{och} \quad \lambda = \frac{hc}{E} \approx 5 \mu\text{m}.$$

Uppgift 7

Fråga

En elektron hos en väteatom är i $(n, l, m_l) = (1, 0, 0)$ tillståndet. Beräkna sannolikheten för att elektronen befinner sig utanför Bohrradien a_0 , mellan $r = a_0$ och $r = 6a_0$. [5p]

Lösning

$$R_{10}(r) = \frac{1}{a_0^{3/2}} 2e^{-r/a_0}$$

Sannolikheten:

$$\int_{a_0}^{6a_0} |R(r)|^2 r^2 dr \approx \frac{40e^{-2}a_0^3}{8a_0^3} = 67\%$$

Uppgift 8

Fråga

Atomkärnor med samma masstal men olika atomnummer (Z) kallas isobarer. Exempel: ^{15}O och ^{15}N . a) Vilka faktorer i den semiempiriska bindningsenergiformeln är olika för dessa två isobarer? [2p] b) Vilken isobar har starkare bindning, ^{15}O eller ^{15}N ? Kommentera svaret. [3p]

Lösning

a) Weizsäckers halv(semi)empiriska formel för bindningsenergin (från formelbladet):

$$B_{SE}(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

Den enda termen som är olika för dessa två isobarer är Coulomb termen: $-a_c Z(Z-1)A^{-1/3}$. Symmetri termen $-a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A}$ har samma värde för isobarer. Den sista termen δ är 0 för udda A.

b) Den semiempiriska bindningsenergin formeln ger mindre bindningsenergi för ^{15}O som har flere protoner ($Z = 8$) och större Coulomb repulsion.