



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Lösningsförslag till tentamen
Måndag den 16 december 2024

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. En av följande ekvationer är exakt. Lös den ekvationen med initialvillkoret $y(1) = 2$. Ange lösningens existensintervall.

$$(1) \quad (1 + \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln y + \frac{y}{x},$$

$$(2) \quad (1 - \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln y + \frac{y}{x},$$

$$(3) \quad (1 - \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x + \frac{y}{x}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Ett nödvändigt villkor för att ekvationen $M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$ ska vara exakt är att $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Om vi skriver om de två första ekvationerna på denna form ser vi att de inte uppfyller detta villkor så de är inte exakta.

För den tredje ekvationen

$$1 + \ln x + \frac{y}{x} - (1 - \ln x) \frac{dy}{dx} = 0$$

gäller att

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(1 + \ln x + \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} = \frac{\partial}{\partial x} (-(1 - \ln x)).$$

Eftersom ekvationen är definierad för (x, y) i det enkelt sammanhängande området $x > 0$ så vet vi att den tredje ekvationen är exakt.

Vi bestämmer en potentialfunktion $\psi(x, y)$ som uppfyller

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M = 1 + \ln x + \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N = -(1 - \ln x).$$

Vi integrerar den andra av dessa ekvationer och får

$$\psi(x, y) = -y + y \ln x + h(x)$$

där $h(x)$ är en funktion av x som återstår att bestämma. Detta insatt i första ekvationen ger

$$1 + \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{y}{x} + h'(x)$$

vilket är uppfyllt om $h'(x) = 1 + \ln x$, vilket vi har om vi väljer $h(x) = x \ln x$. Vi har alltså hittat en potentialfunktion

$$\psi(x, y) = -y + y \ln x + x \ln x$$

Lösningarna till differentialekvationen ges på implicit form av $\psi(x, y) = A$ där A är en konstant. Initialvillkoret ger att den sökta lösningen går igenom punkten $(x, y) = (1, 2)$ och alltså uppfyller

$$-y + y \ln x + x \ln x = \psi(1, 2) = -2.$$

Vi löser ut $y = y(x)$ och får lösningen

$$y = \frac{2 + x \ln x}{1 - \ln x}.$$

Lösningens existensintervall är det största intervall kring $x = 1$ där lösningen existerar. I detta fall slutar lösningen existera vid $x = 0$ och $x = e$. Existensintervallet är alltså $0 < x < e$.

□

2. Bestäm de kritiska punkterna till följande autonoma system för $(x, y) = (x(t), y(t))$ samt avgör om de är stabila.

$$\begin{cases} x' = y^2 - x^2 \\ y' = 1 - x \end{cases}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Systemet

$$\begin{cases} x' = F(x, y) = y^2 - x^2 \\ y' = G(x, y) = 1 - x \end{cases}$$

har en kritisk punkt i (x_0, y_0) om

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = y_0^2 - x_0^2 = 0 \\ G(x_0, y_0) = 1 - x_0 = 0 \end{cases}.$$

Den andra av dessa ekvationer ger oss $x_0 = 1$, den första därefter $y_0^2 = 1$ eller $y_0 = \pm 1$. Vi hittar de två kritiska punkterna $(x_0, y_0) = (1, 1)$ och $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Vi använder metoden med linjärisering för att avgöra deras stabilitet. Linjärisering vid de kritiska punkterna ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_0 & 2y_0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vid punkten $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ges linjäriseringen av $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Egenvärdena till denna ges av

$$0 = \det \begin{pmatrix} -2-r & 2 \\ -1 & -r \end{pmatrix} = r(2+r) + 2 = r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1$$

och de är alltså $r_1 = -1 + i$, $r_2 = -1 - i$. Detta linjära systemet är en stabil spiral, så den kritiska punkten $(x_0, y_0) = (1, 1)$ är stabil.

Vid punkten $(x_0, y_0) = (1, -1)$ ges linjäriseringen av $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Egenvärdena till denna ges av

$$0 = \det \begin{pmatrix} -2-r & -2 \\ -1 & -r \end{pmatrix} = r(r+2) - 2 = r^2 + 2r + 1 - 3 = (r+1)^2 - 3$$

och de är alltså $r_1 = -1 + \sqrt{3} > 0$, $r_2 = -1 - \sqrt{3} < 0$. Detta linjära systemet är en (instabil) sadelpunkt, så den kritiska punkten $(x_0, y_0) = (1, -1)$ är instabil.

□

3. Hitta den allmänna lösningen till det homogena systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -6 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

genom en ansats av typen $\mathbf{x}(t) = t^r \xi$, där r är ett tal och ξ är en vektor. Lös därefter det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -6 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Ansatsen $\mathbf{x}(t) = t^r \xi$ ger en lösning till det homogena systemet om

$$rt^{r-1}\xi = \mathbf{x}'(t) = t^{-1}A\mathbf{x}(t) = t^{-1}A(t^r\xi) = t^{r-1}A\xi, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Vi behöver alltså att $A\xi = r\xi$, eller att ξ är en egenvektor till matrisen A med egenvärde r .

Vi har att

$$0 = \det \begin{pmatrix} 11-r & 18 \\ -6 & -10-r \end{pmatrix} = (r-11)(r+10) + 6 \cdot 18 = r^2 - r - 110 + 108 = r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$$

så egenvärdena till matrisen A är $r_1 = 2$ och $r_2 = -1$. Egenvektorer till egenvärdet $r_1 = 2$ uppfyller ekvationen

$$\begin{pmatrix} 11-2 & 18 \\ -6 & -10-2 \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

till vilken vi väljer lösningen $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Egenvektorer till egenvärdet $r_2 = -1$ uppfyller ekvationen

$$\begin{pmatrix} 11-(-1) & 18 \\ -6 & -10-(-1) \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

till vilken vi väljer lösningen $\xi_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vi har hittat två lösningar

$$\mathbf{x}_1(t) = t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = t^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

till det homogena systemet, så den allmänna lösningen är

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) = c_1 t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 t^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Från den allmänna lösningen får vi att en fundamentalmatris till den homogena ekvationen är

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 & 3t^{-1} \\ -t^2 & -2t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Den uppfyller

$$\Psi'(t) = t^{-1}A\Psi(t).$$

För att lösa den icke-homogena ekvationen använder vi variation av parametrar och gör ansatsen $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$. Insatt i ekvationen ger denna ansats

$$\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{x}'(t) = t^{-1}A\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} = A\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

Detta förenklas till

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$$

eller

$$\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t & 2t^{-1} \\ t & t^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^{-2} & 3t^{-2} \\ -t & -2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -te^t \end{pmatrix}.$$

Detta integrerar vi till

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(t-1)e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

så den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen är

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Psi(t)\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 & 3t^{-1} \\ -t^2 & -2t^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -(t-1)e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= t^{-1}(t-1)e^t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 t^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. (a) Bestäm den serielösning $y = y_1(x)$ vid $x = 0$ till ekvationen

$$y'' - (x+1)y' - y = 0$$

som uppfyller $y_1(0) = 1$ och $y_1'(0) = -1$. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serielösningen, samt beräkna minst fem termer i serien.

- (b) Låt $y = y_2(x)$ vara den lösning till ekvationen ovan som uppfyller $y_2(0) = 4$ och $y_2'(0) = 1$ (du behöver inte bestämma en serielösning för $y_2(x)$). Använd Abels sats för att beräkna Wronskianen $W[y_1, y_2](x)$.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) Punkten $x = 0$ är en ordinär punkt för ekvationen. För att hitta en serielösning gör vi ansatsen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Då är

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} 0 &= y'' - (x+1)y' - y \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 2a_2 - a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_n n - a_{n+1} (n+1) - a_n \right) x^n \\ &= 2a_2 - a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_{n+1} (n+1) - a_n (n+1) \right) x^n. \end{aligned}$$

För att ge en lösning måste alltså koefficienterna a_n uppfylla

$$2a_2 - a_1 - a_0 = 0$$

samt

$$a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_{n+1} (n+1) - a_n (n+1) = 0 \quad \text{för } n \geq 1.$$

Då $n \geq 1$ kan vi dela med $(n+2)(n+1)$ och få rekursionsformeln

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{n+2} \quad \text{för } n \geq 1.$$

Lösningen $y_1(x)$ ska uppfylla $a_0 = y_1(0) = 1$ och $a_1 = y_1'(0) = -1$. För $y_1(x)$ får vi sedan

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + a_0 = -1 + 1 = 0, \\a_3 &= \frac{a_2 + a_1}{3} = \frac{0 - 1}{3} = -\frac{1}{3}, \\a_4 &= \frac{a_3 + a_2}{4} = \frac{-1/3 + 0}{4} = -\frac{1}{12}, \\a_5 &= \dots\end{aligned}$$

Serielösningen börjar alltså med

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \dots$$

- (b) Enligt Abels sats ges Wronskianen $W[y_1, y_2](x)$ för två lösningar $y_1(x), y_2(x)$ till ekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = y'' - (x+1)y' - y = 0$ av

$$W[y_1, y_2](x) = ce^{-\int p(x) dx} = ce^{-\int -(x+1) dx}$$

där konstanten c bestäms av $y_1(x), y_2(x)$. Vi beräknar

$$W[y_1, y_2](x) = ce^{\int (x+1) dx} = ce^{\frac{x^2}{2} + x}.$$

För $x = 0$ har vi

$$W[y_1, y_2](0) = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 5 = ce^{\frac{0}{2} + 0} = c,$$

så

$$W[y_1, y_2](x) = 5e^{\frac{x^2}{2} + x}.$$

□

5. (a) Ekvationen $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ för $y = y(x)$ kallas *exakt* om den kan skrivas på formen $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$ för någon funktion $f(x)$. Bestäm ett villkor på koefficienterna $P(x), Q(x), R(x)$ för att ekvationen ska vara exakt.
- (b) Bestäm $R(x)$ så att ekvationen

$$(x+1)y'' + (2 - (x+1)\tan x)y' + R(x)y = 0$$

är exakt. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen med denna $R(x)$.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) När vi utvecklar den exakta formen av ekvationen får vi

$$\begin{aligned} 0 &= [P(x)y']' + [f(x)y]' \\ &= P(x)y'' + P'(x)y' + f(x)y' + f'(x)y \\ &= P(x)y'' + (P'(x) + f(x))y' + f'(x)y. \end{aligned}$$

Detta är samma som ekvationen $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ om och endast om

$$P'(x) + f(x) = Q(x) \quad \text{och} \quad f'(x) = R(x). \quad (*)$$

Vi eliminerar $f(x)$ ur (*) och får

$$R(x) = f'(x) = (Q(x) - P'(x))' = Q'(x) - P''(x)$$

eller

$$\boxed{P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0.} \quad (**)$$

Ekvationen (**) är alltså ett nödvändigt villkor på $P(x), Q(x), R(x)$ för att ekvationen ska vara exakt.

Omvänt, om ekvationen (**) är uppfylld så gäller ekvationerna (*) med $f(x) = Q(x) - P'(x)$, så ekvationen är då exakt.

Ekvationen (**) är alltså ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ekvationen ska vara exakt.

- (b) Enligt ovan vet vi att ekvationen

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = (x+1)y'' + (2 - x\tan x)y' + R(x)y = 0$$

är exakt om

$$\begin{aligned} R(x) &= Q'(x) - P''(x) = [2 - (x+1)\tan x]' - [x+1]' \\ &= -\tan x - (x+1)(1 + \tan^2 x). \end{aligned}$$

Med denna $R(x)$ är ekvationen alltså exakt med

$$f(x) = Q(x) - P'(x) = (2 - (x+1)\tan x) - 1 = 1 - (x+1)\tan x.$$

Vi får

$$\begin{aligned} 0 &= (x+1)y'' + (2 - x\tan x)y' - (\tan x + (x+1)(1 + \tan^2 x))y \\ &= [(x+1)y']' + [(1 - (x+1)\tan x)y]'. \end{aligned}$$

Vi integrerar och får

$$(x+1)y' + (1 - (x+1)\tan x)y = C$$

där C är en konstant. Detta är en linjär första ordningens ekvation som vi skriver om till

$$y' + \left(\frac{1}{x+1} - \tan x \right) y = \frac{C}{x+1}.$$

En integrerande faktor ges av

$$e^{\int (\frac{1}{x+1} - \tan x) dx} = e^{\ln(x+1) + \ln(\cos x)} = (x+1) \cos x.$$

När vi multiplicerar med denna får vi ekvationen

$$((x+1) \cos x y)' = C \cos x$$

som integreras till

$$((x+1) \cos x) y = C \sin x + D.$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$y(x) = C \frac{\tan x}{(x+1)} + D \frac{1}{(x+1) \cos x}$$

där C, D är konstanter.

□

6. Denna uppgift gäller entydighet för lösningar $y = y(t)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0, \quad (1)$$

där $f(t, y)$ är en kontinuerlig funktion definierad på något område R i ty -planet som innehåller punkten $(0, 0)$.

- (a) Ge ett exempel på ett initialvärdesproblem som (1) med två olika funktioner som lösningar. Ge en noggrann förklaring varför de funktioner du anger är lösningar.
 (b) Antag nu att funktionen $f(t, y)$ i (1) dessutom uppfyller ett Lipschitz-villkor i y , alltså att det finns en konstant $C > 0$ så att

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$$

för alla $(t, y_1), (t, y_2)$ i området R . Visa att om $\phi(t)$ och $\psi(t)$ båda löser problemet (1) så är $\phi(t) = \psi(t)$.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) Funktionen $f = f(y) = y^{1/3}$ är definierad för alla y som det unika tal f som uppfyller $f^3 = y$. Funktionen $f(y)$ är kontinuerlig överallt. Med $f(t, y) = y^{1/3}$ har vi differentialekvationen

$$y' = y^{1/3}.$$

Det är uppenbart att den konstanta funktionen $y = 0$ uppfyller denna ekvation med initialvillkoret $y(0) = 0$. Det är heller inte komplicerat att visa att funktionen

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t < t_0 \\ \left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{3/2}, & \text{om } t_0 \leq t \end{cases}$$

för $t_0 > 0$ är deriverbar, samt uppfyller samma differentialekvation med samma initialvillkor.

- (b) Genom att integrera och använda $y(0) = 0$ får vi att lösningar till initialvärdesproblemet är samma som lösningar till följande integralekvation,

$$y(t) = y(t) - y(0) = \int_0^t y'(s) ds = \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

Om vi har två lösningar $\phi(t)$ och $\psi(t)$ till (1) får vi alltså

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_0^t (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))) ds,$$

och om $t \geq 0$ ger triangelolikheten för integraler sedan att

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \int_0^t |f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))| ds.$$

Enligt Lipschitz-villkoret ger detta sedan

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq C \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)| ds.$$

Definiera funktionen $U(t)$ genom

$$U(t) = \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)| ds.$$

Då ger olikheten ovan att

$$U'(t) = |\phi(t) - \psi(t)| \leq CU(t),$$

och

$$\left(e^{-Ct}U(t)\right)' = e^{-Ct}(U'(t) - CU(t)) \leq 0.$$

Om vi integrerar detta och använder att $U(0) = 0$ får vi att

$$e^{-Ct}U(t) \leq 0.$$

Eftersom som det uppenbarligen gäller att $U(t) \geq 0$ drar vi slutsatsen att $U(t) = 0$ för $t \geq 0$, vilket vi antog ovan. Med variabelbytet $\tau = -t$, $\tau \geq 0$, följer att $U(t) = 0$ för $t \leq 0$ på precis samma sätt. Detta säger oss att $\phi(t) = \psi(t)$ för alla t .

□